ESERCITAZIONE VII
COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ
A.A. 2011/2012

Argomenti: leggi congiunte, indipendenza.

Esercizio 1. Sia $X \sim N(0, 1)$ e sia $Y = X \mathbf{1}_{|X| \leq a} - X \mathbf{1}_{|X| > a}$, dove $a > 0$ è un parametro fissato.

- a) Dimostrare che $Y \sim N(0, 1)$ e che la coppia (X, Y) non ha densità.

[Dunque, l'esistenza delle densità marginali non implica l'esistenza della densità congiunta.]

- b) Dimostrare che X e Y non sono indipendenti e che, almeno per qualche scelta di a , $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

[Dunque, covarianza nulla non implica indipendenza.]

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, siano X e Y v.a. con legge congiunta $\Lambda_{X,Y}$ su $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana.

- a) Dimostrare che $f(X, Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sse $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \Lambda_{X,Y})$, e in tal caso

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f d\Lambda_{X,Y}.$$

- b) Supponiamo che esista la densità congiunta $p_{X,Y}$ di (X, Y) . In tal caso, dimostrare che $f(X, Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se e solo se $f p_{X,Y} \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \text{Leb}_2)$, e in tal caso

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) p_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Esercizio 3. Sia $X = (X_1, X_2)$ una v.a. con densità uniforme nel disco $D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \rho\}$ (qui $|\cdot|$ = norma euclidea), ovvero

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi \rho^2} \mathbf{1}_{D_\rho}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Calcolare $\mathbb{P}(|X| \leq t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- b) Sia R la distanza (aleatoria) di X dall'origine. Calcolare, se esiste, la densità di R .

- c) Siano $R_1, \dots, R_n$ v.a. i.i.d., con la stessa legge di R (ad esempio, le distanze dall'origine di n punti presi a caso e in modo indipendente in D_ρ). Dimostrare che la successione

$$Y_n = \min(R_1, \dots, R_n) (= \text{distanza minima dall'origine})$$

converge a 0 q.c. Cosa si può dire per $Z_n = \max(R_1, \dots, R_n)$? (Si noti che $Z_n =$ distanza massima dall'origine)

Esercizio 4. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x, y) = c \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{1}_{x^2 + y^2 \leq 1}$$

- a) Calcolare c e la densità congiunta di $U = |X|$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti? E la terna (Y, U, V) ha densità di probabilità?
- b) Per $n \geq 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X, Y) . Studiare la convergenza di $\{D_n\}_n$, dove $D_n = \min(R_1, \dots, R_n)$.

Esercizio 5. Siano X e Y due v.a. indipendenti, di legge Λ_X e Λ_Y rispettivamente.

- a) Provare che $X+Y$ ha legge $\Lambda_{X+Y} = \Lambda_X * \Lambda_Y$, dove $*$ denota il prodotto di convoluzione¹.
- b) Supponiamo che una delle due, ad esempio X , abbia densità. Dimostrare che la v.a. $X+Y$ ha densità e

$$\frac{d\Lambda_{X+Y}}{d\text{Leb}}(x) = \int f_X(x-y) d\Lambda_Y(y).$$

Esercizio 6. Sia X una v.a. con densità $p_X(x) = ce^{-|x|}$ e sia $Y = X^2 \mathbf{1}_{|X| < a}$, con $a, c > 0$ fissate.

- a) Determinare c e dire se $X \in L^2$.
- b) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$. X e Y sono indipendenti?
- c) Dire se Y ha densità e scrivere la f.d. F_Y di Y .

¹Ricordiamo che il prodotto di convoluzione tra le misure μ e ν è dato da

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A-z) \nu(dz) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-z) \mu(dz),$$

dove, per $z \in \mathbb{R}$, $A-z = \{x : x = y-z, y \in A\}$ è l'insieme che si ottiene traslando A con z .

SOLUZIONI

Esercizio 1 a) Calcoliamo la f.d. di Y : per $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y, |X| \leq a) + \mathbb{P}(Y \leq y, |X| > a) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y, |X| \leq a) + \mathbb{P}(X \geq -y, |X| > a) \end{aligned}$$

quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X > -y) & y \leq -a \\ \mathbb{P}(-a \leq X \leq y) + \mathbb{P}(X > a) & -a \leq y \leq a \\ \mathbb{P}(-a \leq X \leq a) + \mathbb{P}(-y \leq X \leq -a) + \mathbb{P}(X > a) & y \geq a \end{cases}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \left(1 - F_X(-y)\right) \mathbf{1}_{y \leq -a} \\ &\quad + \left(F_X(y) - F_X(-a) + 1 - F_X(-a)\right) \mathbf{1}_{-a \leq y \leq a} \\ &\quad + \left(F_X(a) - F_X(-a) + F_X(-a) - F_X(-y) + 1 - F_X(a)\right) \mathbf{1}_{y \geq a}. \end{aligned}$$

Allora,

$$F'_Y(y) = F'_X(-y) \mathbf{1}_{y < -a} + F'_X(y) \mathbf{1}_{-a < y < a} + F'_X(-y) \mathbf{1}_{y > a}.$$

Ora, $X \sim N(0, 1)$, quindi $F'_X(x) = p_X(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, ed essendo p_X una funzione pari, si ha, per q.o. $y \in \mathbb{R}$, $F'_Y(y) = p_X(y)$. Ciò prova che Y ha densità $p_Y(y) = p_X(y)$, quindi $Y \sim N(0, 1)$.

La densità congiunta non esiste. Infatti, sia $A = \{(x, y) : |x| \leq a \text{ e } y = x\}$. A è un segmento di $\mathbb{R}^2$, quindi $\text{Leb}_2(A) = 0$. Ma $\Lambda_{X,Y}(A) > 0$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{X,Y}(A) &= \mathbb{P}((X, Y) \in A) = \mathbb{P}(|X| \leq a, Y = X) \\ &= \mathbb{P}(|X| \leq a) = \int_{-a}^a p_X(x) dx > 0. \end{aligned}$$

Quindi, $\Lambda_{X,Y}$ non è assolutamente continua rispetto a Leb_2 , dunque la densità congiunta non esiste.

b) Prendiamo $\Gamma_1 = (-a, a)$ e $\Gamma_2 = (a, +\infty)$:

$$\mathbb{P}(X \in \Gamma_1, Y \in \Gamma_2) = \mathbb{P}(|X| < a, Y > a) = 0,$$

(perché se $|X| < a$ allora $Y = X$, dunque $\{|X| < a, Y > a\} = \emptyset$), ma $\mathbb{P}(|X| < a) = \int_{-a}^a p_X(x) dx > 0$ e $\mathbb{P}(Y > a) = \int_a^{+\infty} p_Y(y) dy > 0$. Quindi, $\mathbb{P}(X \in \Gamma_1, Y \in \Gamma_2) \neq \mathbb{P}(X \in \Gamma_1)\mathbb{P}(Y \in \Gamma_2)$, cioè le v.a. X e Y non sono indipendenti.

Calcoliamo la covarianza tra X e Y . Essendo X e Y due gaussiane standard, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, e rimane

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X(X \mathbf{1}_{|X| \leq a} - X \mathbf{1}_{|X| > a})) \\ &= \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X| \leq a}) - \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}) = \rho(a).\end{aligned}$$

Ora, è facile verificare che $\rho(a)$ è una funzione (di $a \in (0, +\infty)$) continua e t.c.

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \rho(a) = -\mathbb{E}(X^2) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \rho(a) = \mathbb{E}(X^2) = 1 > 0.$$

Allora, deve esistere un punto $a^* > 0$ tale che $\rho(a^*) = 0$. Se indichiamo con Y^* la v.a. Y corrispondente alla scelta di $a = a^*$, allora la coppia (X, Y^*) ha covarianza nulla ed è costituita da v.a. non indipendenti.

Esercizio 2 a) Seguiamo quella che il libro di testo chiama “*the standard machine*”.

- 1) Sia $f \in (SF)^+$: $f(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{(x,y) \in A_k}$, con $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ e $c_1, \dots, c_n \geq 0$. Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X, Y)) &= \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(X,Y) \in A_k}) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{P}((X, Y) \in A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \Lambda_{(X,Y)}(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{A_k} d\Lambda_{(X,Y)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k} d\Lambda_{(X,Y)} = \int_{\mathbb{R}^2} f d\Lambda_{(X,Y)}\end{aligned}$$

- 2) $f \in (m\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))^+$: sia $\{f_n\}_n$ una successione di $(SF)^+$ tale che $f_n \uparrow f$. Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X, Y)) &\stackrel{\text{(MON)}}{=} \lim_n \mathbb{E}(f_n(X, Y)) \stackrel{\text{da 1)}}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}^2} f_n d\Lambda_{(X,Y)} \\ &\stackrel{\text{(MON)}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \lim_n f_n d\Lambda_{(X,Y)} = \int_{\mathbb{R}^2} f d\Lambda_{(X,Y)}\end{aligned}$$

Ne segue che per ogni f , $|f| \in (m\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))^+$ e allora

$$\mathbb{E}(|f(X, Y)|) = \int_{\mathbb{R}^2} |f| d\Lambda_{(X,Y)}$$

(che sia finito o no). Quindi, $f(X, Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se e solo se $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \Lambda_{X,Y})$. In tal caso, posto come al solito $f = f^+ - f^-$, allora $f^\pm \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \Lambda_{X,Y})$ e

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \mathbb{E}(f^+(X, Y)) - \mathbb{E}(f^-(X, Y))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f^+ d\Lambda_{(X,Y)} - \int_{\mathbb{R}^2} f^- d\Lambda_{(X,Y)} = \int_{\mathbb{R}^2} f d\Lambda_{(X,Y)}$$

da cui la tesi.

b) La densità congiunta è la derivata di Radon Nycodim della legge rispetto a Leb_2 :

$$\frac{d\Lambda_{(X,Y)}}{d\text{Leb}_2} = p_{X,Y}$$

Ma allora la tesi è conseguenza di quanto visto a lezione.

Esercizio 3 a) Ovviamente, $\mathbb{P}(|X| \leq t) = 0$ se $t < 0$. Se $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \leq t) &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq t\}} f_X(x) dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{D_t} \mathbf{1}_{D_\rho}(x) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{D_t \cap D_\rho} dx_1 dx_2 = \frac{\text{Leb}_2(D_t \cap D_\rho)}{\pi \rho^2}. \end{aligned}$$

Ma $D_t \cap D_\rho = D_t$ se $t \leq \rho$ e $D_t \cap D_\rho = D_\rho$ se $t > \rho$, quindi

$$\mathbb{P}(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^2/\rho^2 & \text{se } 0 \leq t < \rho \\ 1 & \text{se } t \geq \rho. \end{cases}$$

b) In **a)**, è stata calcolata la f.d. di R : $R = |X|$, quindi $F_R(r) = \mathbb{P}(|X| \leq r)$. Derivando, $F'_R(r) = 2r/\rho^2 \mathbf{1}_{0 < r < \rho}$ che integra a 1, quindi la densità di R esiste e vale $f_R(r) = 2r/\rho^2 \mathbf{1}_{0 < r < \rho}$.

c) Per $\delta > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n| > \delta) &= \mathbb{P}(\min(R_1, \dots, R_n) > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta, \dots, R_n > \delta) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(R_k > \delta) = \left(1 - F_R(\delta)\right)^n = \left(1 - \frac{\delta^2}{\rho^2}\right)^n \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera se $\delta < \rho$, e $\mathbb{P}(|Y_n| > \delta) = 0$ se $\delta \geq \rho$. Allora, per ogni $\delta > 0$,

$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \delta) \leq \sum_n \left(1 - \frac{\delta^2}{\rho^2}\right)^n < \infty,$$

quindi $Y_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Per quanto riguarda la distanza massima, viene da pensare che converga a ρ , il che è vero. Ad esempio, si può verificare come segue.

Indichiamo con $\tilde{R}_i = \rho - R_i$. Ovviamente le v.a. $\tilde{R}_i$ rimangono indipendenti. Inoltre,

$$F_{\tilde{R}_i}(t) = \mathbb{P}(\tilde{R}_i \leq t) = \mathbb{P}(R_i \geq \rho - t) = 1 - F_{R_i}(\rho - t).$$

Allora, procedendo analogamente a sopra, si verifica immediatamente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n) = 0 \quad \text{q.c.}$$

Infine, da $R_i = \rho - \tilde{R}_i$, si ottiene

$$Z_n = \max(R_1, \dots, R_n) = \max(\rho - \tilde{R}_1, \dots, \rho - \tilde{R}_n) = \rho - \min(\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n)$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \rho - \lim_{n \rightarrow \infty} \min(\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n) = \rho \quad \text{q.c.}$$

Esercizio 4 a) Si ha

$$c^{-1} = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi,$$

quindi $c = 3/(2\pi)$.

$(U, V) = \phi(X, Y)$, dove $\phi(x, y) = (|x|, y/x)$. Poniamo quindi

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) : x > 0\}, & \phi_1(x, y) &= (x, y/x); \\ A_2 &= \{(x, y) : x < 0\}, & \phi_2(x, y) &= (-x, y/x). \end{aligned}$$

Le ϕ_i sono regolari e invertibili con inverse

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (u, uv), & (u, v) &\in \phi_1(A_1) = \{(u, v) : u > 0\}, \\ \psi_2(x, y) &= (-u, -uv), & (u, v) &\in \phi_2(A_2) = \{(u, v) : u > 0\}. \end{aligned}$$

Poiché $\mathbb{P}((X, Y) \in A_1 \cup A_2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1$, usando il TLC segue che

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \sum_{i=1}^2 f_{X,Y} \circ \psi_i(u, v) |\det J_{\psi_i}(u, v)| \mathbf{1}_{(u,v) \in \phi_i(A_i)} \\ &= \frac{3}{\pi} u \sqrt{1 + v^2} \mathbf{1}_{u > 0, u^2(1+v^2) \leq 1}. \end{aligned}$$

Dunque $f_{U,V}$ non si fattorizza el prodotto di due funzioni dipendenti l'una dalla sola u e l'altra dalla sola v , quindi U e V non sono indipendenti.

La terna (Y, U, V) non ha densità. Si prenda, ad esempio, $A = \{(y, u, v) : y > 0, v > 0, y = uv\}$: $\text{Leb}_3(A) = 0$ ma $\mathbb{P}((Y, U, V) \in A) = \mathbb{P}(Y > 0, X > 0) > 0$.

b) Cerchiamo la f.d. di R_n : per $0 < r < 1$,

$$F_n(r) = \mathbb{P}(R_n \leq r) = \mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq r^2) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2 d\rho = r^3$$

e $F_n(r) = 0$ se $r \leq 0$, $F_n(r) = 1$ per $r \geq 1$. Quindi, fissato $\delta > 0$, e usando l'indipendenza delle R_n ,

$$\mathbb{P}(D_n > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta, \dots, R_n > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta) \cdots \mathbb{P}(R_n > \delta) = (1 - \delta^3)^n$$

purché $\delta \in (0, 1)$, altrimenti $\mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$. Ma allora, per ogni $\delta > 0$, la serie $\sum_n \mathbb{P}(D_n > \delta) = \sum_n \mathbb{P}(|D_n| > \delta)$ converge, quindi $D_n \rightarrow 0$ q.c.

Esercizio 5 a) Ricordiamo che se X e Y sono indipendenti allora la legge congiunta è uguale alla misura prodotto delle leggi marginali:

$$\Lambda_{X,Y} = \Lambda_X \times \Lambda_Y.$$

Se Λ_{X+Y} denota la legge di $X + Y$, si ha per ogni boreliano A ,

$$\begin{aligned} \Lambda_{X+Y}(A) &= \mathbb{P}(X + Y \in A) = \int_{\{(x,y): x+y \in A\}} d\Lambda_{X,Y}(x, y) \\ &= \int_{\{(x,y): x+y \in A\}} d\Lambda_X(x) d\Lambda_Y(y). \end{aligned}$$

Ora, usando Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\{(x,y): x+y \in A\}} d\Lambda_X(x) d\Lambda_Y(y) &= \int d\Lambda_X(x) \int_{\{y: x+y \in A\}} d\Lambda_Y(y) \\ &= \int \Lambda_Y(A - x) d\Lambda_X(x) \end{aligned}$$

ma anche

$$\begin{aligned} \int_{\{(x,y): x+y \in A\}} d\Lambda_X(x) d\Lambda_Y(y) &= \int d\Lambda_Y(y) \int_{\{x: x+y \in A\}} d\Lambda_X(x) \\ &= \int \Lambda_X(A - y) d\Lambda_Y(y) \end{aligned}$$

e quindi $\Lambda_{X+Y} = \Lambda_X * \Lambda_Y$.

b) Sia $f_X = \frac{d\Lambda_X}{d\text{Leb}}$. Per A boreliano,

$$\begin{aligned} \Lambda_{X+Y}(A) &= \int \Lambda_Y(A - x) d\Lambda_X(x) = \int \Lambda_Y(A - x) \frac{d\Lambda_X}{d\text{Leb}}(x) dx \\ &= \int \Lambda_Y(A - x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

Usando Fubini,

$$\Lambda_{X+Y}(A) = \int f_X(x) dx \int \mathbf{1}_{x+y \in A} d\Lambda_Y(y) = \int d\Lambda_Y(y) \int \mathbf{1}_{x+y \in A} f_X(x) dx$$

Il cambio di variabile $x + y = \xi$ dà $\int \mathbf{1}_{x+y \in A} f_X(x) dx = \int \mathbf{1}_{\xi \in A} f_X(\xi - y) d\xi$ ed usando nuovamente Fubini otteniamo

$$\Lambda_{X+Y}(A) = \int d\Lambda_Y(y) \int_A f_X(\xi - y) d\xi = \int_A \left(\int f_X(\xi - y) d\Lambda_Y(y) \right) d\xi$$

da cui segue che

$$\frac{d\Lambda_{X+Y}}{d\text{Leb}}(x) = \int f_X(x - y) d\Lambda_Y(y).$$

Esercizio 6 a) p_X è integrabile su $\mathbb{R}$: posto $f_n(x) = p(x) \mathbf{1}_{|x| < n}$, evidentemente $0 \leq f_n \uparrow p_X$ e quindi (MON) $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \uparrow \int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx$. Ora,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 2c \int_0^n e^{-x} dx = 2c(1 - e^{-n}) \uparrow 2c = \int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx,$$

da cui segue che p_X è integrabile e $c = 1/2$. Perché $X \in L^2$, la funzione $x^2 p_X(x)$ dev'essere integrabile su $\mathbb{R}$. Ora, $0 \leq x^2 p_X(x) \mathbf{1}_{|x| < n} \uparrow x^2 p_X(x)$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 p_X(x) \mathbf{1}_{|x| < n} dx &= 2c \int_0^n x^2 e^{-x} dx \\ &= 2c \left(-x^2 e^{-x} \Big|_0^n - 2x e^{-x} \Big|_0^n - 2e^{-x} \Big|_0^n \right) \uparrow 4c = 2. \end{aligned}$$

Dunque, $X \in L^2$ e $\mathbb{E}(X^2) = 2$. In particolare, $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx = 0$ perché la funzione $x \mapsto x p_X(x)$ è dispari.

b) Per $X, Y \in L^2$, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ perché qui $\mathbb{E}(X) = 0$. Quindi, occorre dimostrare che $Y \in L^2$ e calcolare $\mathbb{E}(XY)$. Poiché $Y = X^2 \mathbf{1}_{|X| < a}$, in particolare $|Y|^2 \leq a^4$, quindi (per dominazione) la sua media esiste. Inoltre,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3 \mathbf{1}_{|X| < a}) = \int x^3 \mathbf{1}_{|x| < a} p_X(x) dx = \int_{-a}^a x^3 p_X(x) dx = 0$$

perché $x \mapsto x^3 p_X(x)$ è dispari. Quindi $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Ma X e Y non sono indipendenti. Ad esempio, $\mathbb{P}(X > a, Y > 0) = \mathbb{P}(X > a, X^2 \mathbf{1}_{|X| < a} > 0) = \mathbb{P}(X > a, 0 > 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ma

$$\mathbb{P}(X > a) \mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}(X > a) \mathbb{P}(|X| < a) \neq 0 = \mathbb{P}(X > a, Y > 0).$$

c) Y non ha densità perché la sua legge Λ_Y non è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Infatti, $\text{Leb}(\{0\}) = 0$ ma $\Lambda_Y(\{0\}) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(|X| \geq a) = 2c \int_a^\infty e^{-x} dx > 0$.

Scriviamo la f.d. di Y : per $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \mathbf{1}_{|X| < a} \leq y)$$

quindi $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$ ma anche $F_Y(y) = 1$ per $y > a^2$. Per $0 \leq y \leq a^2$ si ha:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(X^2 \mathbf{1}_{|X| < a} \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y, |X| < a) + \mathbb{P}(|X| > a) \\ &= 2c \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + 2 \int_a^\infty e^{-x} dx = 1 - e^{-\sqrt{y}} + e^{-a}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}} + e^{-a} & \text{se } 0 \leq y < a^2 \\ 1 & \text{se } y \geq a^2. \end{cases}$$

Si noti che $\Delta F_Y(0) = e^{-a} > 0$, quindi Y non può avere densità (nel qual caso F_Y sarebbe continua).