Esercitazione VI
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: convergenza di v.a. e LGN.

Esercizio 1. Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. in $\mathscr{L}^1$. Dimostrare che se $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{L}^1$ allora $X_1 \cdots X_n \in \mathscr{L}^1$ e $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_n)$.

Esercizio 2. **a)** Dimostrare che $X_n \to X$ in probabilità se e solo se da ogni sottosuccessione $\{X_{n_k}\}_k$ di $\{X_n\}_n$ si può estrarre una ulteriore sottosuccessione $\{X_{n_{k_j}}\}_j$ tale che $X_{n_{k_j}} \to X$ q.c. per $j \to \infty$.

b) Da **a)** dedurre che:

b1) il limite in probabilità è unico q.c.;

b2) se $X_n \to X$ in probabilità e se f è una funzione continua allora $f(X_n) \to f(X)$ in probabilità.

Esercizio 3. Una successione $\{X_n\}_n$ si dice *fondamentale (o di Cauchy) in probabilità* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $N > 0$ tale che per ogni $n, m \geq N$ si abbia $\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq \varepsilon$.
Dimostrare che se $\{X_n\}_n$ è fondamentale in probabilità allora

a) esiste una sottosuccessione $\{X_{n_k}\}_k$ di $\{X_n\}_n$ di Cauchy q.c.[1] e dedurre che esiste il limite q.c. X di $\{X_{n_k}\}_k$;

b) $\{X_n\}_n$ converge in probabilità alla v.a. X di cui al punto **a)**.

Esercizio 4. Supponiamo che $X_n \to X$ in L^p e sia f una funzione continua.

a) Provare (con un controesempio) che in generale non si ha che $f(X_n) \to f(X)$ in L^p.

b) Provare che se f è lipschitziana allora $f(X_n) \to f(X)$ in L^p.

Esercizio 5. Sia $p \geq 1$. Dimostrare che se $X_n \to X$ in L^p allora $X_n \to X$ in L^r per ogni $r \in [1, p]$.

Esercizio 6. **a)** Dimostrare che se $X_n \to X$ in probabilità allora $f(X_n) \to f(X)$ in L^p per ogni f limitata e lipschitziana.

b) Sia $p \geq 1$. Dimostrare che $X_n \to X$ in probabilità se e solo se $\arctan X_n \to \arctan X$ in L^p. Dedurre che la convergenza in probabilità è compatibile con una metrica, cioè: esiste una metrica d_P sullo spazio $m\mathscr{F} = \{\text{v.a. su } (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})\}$ tale che $X_n \to X$ in probabilità se e solo se $d_P(X_n, X) \to 0$ per $n \to \infty$.

[1] Cioè, esiste $\mathcal{N} \in \mathscr{F}$ tale che $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$ e per ogni $\omega \notin \mathcal{N}$, la successione numerica $\{X_{n_k}(\omega)\}_k$ è di Cauchy.

Esercizio 7. Sia $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti tali che $Y_n \sim \text{Exp}(n)$. Studiare la convergenza q.c., in probabilità e in L^p di $\{X_n\}_n$ a 0, dove

a) $X_n = Y_n$;

b) $X_n = \frac{n}{\log n} Y_n$;

c) $X_n = nY_n$.

Esercizio 8. Sia $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. tali che $Y_n \sim \text{Un}(0, 1/n)$. Studiare la convergenza q.c., in probabilità e in L^p a 0 di $\{n^\gamma Y_n\}_n$, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9. Sia X_0 una v.a. e per $n \geq 1$, si ponga

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \beta$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Studiare la convergenza q.c. di $\{X_n\}_n$ al variare di α e β, eventualmente imponendo condizioni opportune su X_0.

Esercizio 10. Sia $\{X_n\}_n \subset L^2$ una successione di v.a. i.i.d., con $\mathbb{E}(X_1) = 0$ e $\text{Var}(X_1) = 1$.

a) La v.a. X_1X_2 ha media? Ha varianza? Se sì, quanto valgono?

b) Si può dire che $\frac{1}{n}\Big(X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n}\Big)$ converge q.c.? Se sì, a cosa converge?

c) Supponiamo che $X_n \in L^8$. Discutere la convergenza q.c. delle successioni

$$\frac{1}{n}\Big(X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4\Big) \qquad\qquad \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4}.$$

Esercizio 11. Per $n \geq 1$, sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim \text{N}(\mu, \sigma_n^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma_n^2 \to 0$ per $n \to \infty$.

a) Studiare la convergenza in probabilità e in L^p della successione $\{X_n\}_n$.

b) Trovare due successioni possibili per $\{\sigma_n^2\}_n$ tali che $\{X_n\}_n$ converge q.c. e $\{X_n\}_n$ non converge q.c. (eventualmente imponendo una condizione di indipendenza sulle X_n)[2].

[2] A tale scopo, potrebbe essere utile il seguente fatto (facilmente dimostrabile): se $Z \sim \text{N}(0,1)$, allora per $z \to +\infty$ si ha $\mathbb{P}(|Z| > z) = O\big(2\,\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,z}\big)$, nel senso che

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\mathbb{P}(|Z| > z)}{2\,\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,z}} = 1.$$

Esercizio 12. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d., con varianza (finita) σ^2. Posto $\bar{X}_n = \sum_{k=1}^n X_k/n$, dimostrare che la successione $S_n^2 = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ converge q.c. e determinarne il limite. Calcolare anche $\mathbb{E}(S_n^2)$.

Esercizio 13. *(Sulla legge dei Grandi Numeri)* Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. di L^2, a due a due non correlate e di media nulla, e sia, per ogni n, $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n)$. Dimostrare che

a) se $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$ allora vale la LDGN:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k)) \to 0 \text{ in probabilità;}$$

b) se $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$ allora vale la LFGN:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k)) \to 0 \text{ q.c.}$$

Esercizio 14. Sia $\{X_n\}_{n>1}$ una successione di v.a. tale che X_n ha legge

$$\mu_n = \frac{1}{n^2}\delta_{\{n\}} + \frac{1}{n^2}\nu + \Big(1 - \frac{2}{n^2}\Big)\delta_{\{0\}},$$

dove $\delta_{\{c\}}$ denota la massa di Dirac in c e $\nu(A) = \int_A \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\,dx$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Studiare la convergenza in probabilità, in L^p e q.c. della successione $\{X_n\}_n$.

Esercizio 15. Sia $\{X_n\}_{n>1}$ una successione di v.a. Dimostrare che $X_n \to 0$ in probabilità se e solo se $\frac{|X_n|}{1+|X_n|} \to 0$ in L^1.

Esercizio 16. Sia $\{X_n\}_{n>1}$ una successione di v.a. indipendenti tali che $X_1 = 0$ q.c. e

$$\mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n\log n} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}, \quad n \geq 2.$$

Sia $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Dimostrare che $\frac{1}{n} S_n \to 0$ in probabilità.

b) Dimostrare che $\mathbb{P}(X_n \geq n \text{ i.o.}) = 1$ e dedurre che la convergenza in **a)** non vale q.c.

Soluzioni

Esercizio 1 Dimostriamolo per $n = 2$ (il caso generale segue immediatamente). Supponiamo dapprima che X_1, X_2 siano semplici positive:

$$X_i = \sum_{j \leq N_i} a_{ij} \mathbf{1}_{A_{ij}}, \quad i = 1, 2.$$

Allora è immediato verificare che $X_1 X_2 \in \mathscr{L}^1$ e $\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$. Siano ora $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^1$. Allora, esistono delle successioni $Y_n^{\pm}$ e $Z_n^{\pm}$ di funzioni semplici positive tali che $Y_n^{\pm} \uparrow X_1^{\pm}$ e $Z_n^{\pm} \uparrow X_2^{\pm}$. Prendendo ad esempio $Y_n^{\pm} = \alpha_n \circ X_1^{\pm}$ e $Y_n^{\pm} = \alpha_n \circ X_2^{\pm}$, si ha anche che le due coppie di successioni sono indipendenti. Allora, per convergenza monotona ed usando l'indipendenza,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_1 X_2|) &= \lim_n \mathbb{E}((Y_n^+ + Y_n^-)(Z_n^+ + Z_n^-)) \\ = \lim_n \Big(&\mathbb{E}(Y_n^+)\mathbb{E}(Z_n^+) + \mathbb{E}(Y_n^+)\mathbb{E}(Z_n^-) + \mathbb{E}(Y_n^-)\mathbb{E}(Z_n^+) + \mathbb{E}(Y_n^-)\mathbb{E}(Z_n^-) \Big) \\ &= \mathbb{E}(Y^+)\mathbb{E}(Z^+) + \mathbb{E}(Y^+)\mathbb{E}(Z^-) + \mathbb{E}(Y^-)\mathbb{E}(Z^+) + \mathbb{E}(Y^-)\mathbb{E}(Z^-) \\ &= \mathbb{E}(Y^+ + Y^-)\mathbb{E}(Z^+ + Z^-) = \mathbb{E}(|X_1|)\mathbb{E}(|X_2|) < \infty \end{aligned}$$

il che prova che $X_1 X_2 \in \mathscr{L}^1$. Per dimostrare che $\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$, basta ripetere un ragionamento analogo a quello appena visto oppure usare la convergenza dominata.

Esercizio 2. a) Ricordiamo che se $X_n \to X$ in probabilità allora esiste una sottosuccessione che converge ad X q.c. Quindi, se $X_n \to X$ in probabilità allora ogni sua sottosuccessione continua a convergere in probabilità e quindi esiste sempre una ulteriore sottosuccssione che converge ad X q.c.

Viceversa, supponiamo per assurdo che X_n non converga ad X. Quindi, NON è vero che per ogni $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. Dunque, deve valere che: esistono $\varepsilon, \delta > 0$ tali che per ogni N esiste $n > N$ tale che $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) > \delta$. Allora, è possibile costruire una sottosuccessione $\{X_{n_k}\}_k$ tale che

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) > \delta \text{ per ogni } k \tag{1}$$

Mostriamo ora che (1) implica che da $\{X_{n_k}\}_k$ non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente q.c. a X. Infatti, sia $\{X_{n_{k_j}}\}_j$ una sottosuccessione di $\{X_{n_k}\}_k$. Allora,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_{n_{k_j}} - X| > \varepsilon \text{ i.o}) = \mathbb{P}\big(\cap_j \cup_{\ell \geq j} |X_{n_{k_\ell}} - X| > \varepsilon \big) = \\ = \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\big(\cup_{\ell \geq j} |X_{n_{k_\ell}} - X| > \varepsilon \big) \geq \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_{n_{k_j}} - X| > \varepsilon \big) \geq \delta > 0 \end{aligned}$$

il che prova la tesi.

b1) Supponiamo che $\{X_n\}_n$ converga in probabilità a X e a Y. Allora, sia X che Y sono il limite q.c. di una sottosuccessione di $\{X_n\}_n$, da cui $X = Y$ q.c.

b2) Siano $Y_n = f(X_n)$ e $Y = f(X)$. Presa $\{Y_{n_k}\}_k$ sottosuccessione di $\{Y_n\}_n$, allora $Y_{n_k} = f(X_{n_k})$ e $\{X_{n_k}\}_k$ è una sottosuccessione di $\{X_n\}_n$. Poiché $X_n \to X$ in probabilià, da $\{X_{n_k}\}_k$ si può estrarre una sottosuccessione $\{X_{n_{k_j}}\}_j$ che converge a X q.c. Ora, posto $Y_{n_{k_j}} = f(X_{n_{k_j}})$, poiché f è continua si ha $Y_{n_{k_j}} \to f(X) = Y$ q.c. La tesi segue ora da **a)** .

Esercizio 3. **a)** Intanto, è facile vedere che esiste una sottosuccessione $\{X_{n_k}\}_k$ tale che

$$\text{per ogni } k \text{ e } \ell \text{ si ha } \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - X_{n_k+\ell}| > \frac{1}{2^k}\Big) \leq \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

Infatti, preso $\varepsilon = 2^{-1}$ esiste un indice n_1 tale che per ogni ℓ si abbia $\mathbb{P}(|X_{n_1} - X_{n_1+\ell}| > 2^{-1}) \leq 2^{-1}$. Preso ora $\varepsilon = 2^{-2}$ esiste un indice $n_2 > n_1$ tale che per ogni ℓ si abbia $\mathbb{P}(|X_{n_2} - X_{n_2+\ell}| > 2^{-2}) \leq 2^{-2}$. Iterando il procedimento, si ottiene (2). Mostriamo che tale sottosuccessione è di Cauchy q.c.
Intanto, osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ e ℓ si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_k \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - X_{n_k+\ell}| > \varepsilon\Big) \\
&= \sum_{k\,:\,\frac{1}{2^k}>\varepsilon} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - X_{n_k+\ell}| > \varepsilon\Big) + \sum_{k\,:\,\frac{1}{2^k}\leq\varepsilon} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - X_{n_k+\ell}| > \varepsilon\Big) \\
&\leq \sum_{k<-\log_2\varepsilon} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - X_{n_k+\ell}| > \varepsilon\Big) + \sum_{k>-\log_2\varepsilon} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - X_{n_k+\ell}| > 2^{-k}\Big) \\
&= const + \sum_k \frac{1}{2^k} < \infty
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni ℓ la successione $Y^\ell_{n_k} = |X_{n_k} - X_{n_k+\ell}|$ converge a 0 q.c. Allora, per ogni $\ell > 0$ esiste $\mathcal{N}_\ell \in \mathscr{F}$ tale che $\mathbb{P}(\mathcal{N}_\ell = 0)$ e per $\omega \notin \mathcal{N}_\ell$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che per ogni $k > k_0$ si ha $|X_{n_k}(\omega) - X_{n_k+\ell}(\omega)| \leq \varepsilon$. Sia $\mathcal{N} = \cup_\ell \mathcal{N}_\ell$. Allora, $\mathbb{P}(\mathcal{N} = 0)$ e per $\omega \notin \mathcal{N}$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che per ogni $k, m > k_0$ si ha $|X_{n_k}(\omega) - X_{n_m}(\omega)| \leq \varepsilon$. Dunque, $\{X_{n_k}\}_k$ è di Cauchy q.c. e quindi esiste il limite q.c. X.

b) La tesi segue immediatamente usando **a)** dell'Esercizio 2.

Esercizio 4. **a)** Un controesempio banale è dato da una v.a. $X \in L^p$ e da una funzione f continua tale che $f(X) \notin L^p$. Ad esempio, $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $f(x) = e^{x^2/2}$: $\mathbb{E}(|f(X)|^p) = +\infty$ per ogni $p \geq 1$.

b) Se L denota la costante di Lipschitz, si ha

$$\mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|^p) \leq L^p \mathbb{E}(|X_n - X|^p) \to 0.$$

Esercizio 5 Usando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^r) \le \Big(\mathbb{E}(|X_n - X|^{r\cdot\frac{p}{r}})\Big)^{r/p} = \|X_n - X\|_p^r \to 0.$$

Esercizio 6 a) Sia L la costante di Lipschitz. Per $\varepsilon > 0$, si ha

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|^p)\\ &= \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|^p \mathbf{1}_{|X_n - X| \le \varepsilon}) + \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|^p \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon})\\ &\le \mathbb{E}(L^p |X_n - X|^p \mathbf{1}_{|X_n - X| \le \varepsilon}) + \mathbb{E}((2\|f\|_\infty)^p \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon})\\ &\le L^p \varepsilon^p + (2\|f\|_\infty)^p \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|^p) \le L^p \varepsilon^p$$

e per l'arbitrarietà di ε, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|^p) = 0$.
b) La funzione $f(x) = \arctan x$ è limitata e Lipschitziana. Quindi, se $X_n \to X$ in probabilità allora $\arctan X_n \to \arctan X$ in L^p, per ogni $p \ge 1$. Viceversa, se $\arctan X_n \to \arctan X$ in L^p, per $p \ge 1$ allora $\arctan X_n \to \arctan X$ in probabilità e quindi $X_n = \tan \arctan X_n \to X = \tan \arctan X$ in probabilità perché la funzione tan è continua.
Definiamo quindi, per $X, Y \in m\mathscr{F}$,

$$d_P(X, Y) = \| \arctan X - \arctan Y\|_p.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta: se X è una v.a. allora $\arctan X$ è limitata, dunque $\arctan X \in L^p$. E ovviamente, d_P è una metric su $m\mathscr{F}$. Infine, per quanto appena visto,

$$X_n \to X \text{ in probabilità se e solo se } d_P(X_n, X) \to 0.$$

Esercizio 7 a) $X_n = Y_n \ge 0$ q.c. e $\mathbb{P}(Y_n \le y) = 1 - e^{-ny}$, se $y \ge 0$. Quindi, per $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta) = e^{-n\delta} \to 0 \quad \text{se } n \to \infty,$$

quindi $X_n \to 0$ in probabilità. Poiché $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \sum_n e^{-n\delta} < \infty$ per ogni $\delta > 0$, $X_n \to 0$ anche q.c. Fissato $p \ge 1$, studiamo la convergenza in L^p: usando la sostituzione $y = nx$, si ha

$$||X_n||_p^p = \mathbb{E}(X_n^p) = \mathbb{E}(Y_n^p) = \int_0^\infty x^p\, n\, e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^p}\int_0^\infty y^p\, e^{-y}\, dy = \frac{C_p}{n^p}$$

avendo posto $C_p = \int_0^\infty y^p\, e^{-y}\, dy (< \infty)$. Allora, $X_n \to 0$ anche in L^p.

b) $X_n = nY_n / \log n$. Studiamo la convergenza in probabilità:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta \log n/n) = e^{-n\delta \log n/n} = \frac{1}{n^\delta} \to 0 \quad \text{ se } n \to \infty$$

per ogni $\delta > 0$, quindi $X_n \to 0$ in probabilità. Ma $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ converge se e solo se $\delta > 1$, quindi non possiamo ancora concludere che c'è convergenza q.c. Poiché inoltre le v.a. sono indipendenti, se $\delta \leq 1$ la serie diverge e allora, da BC2, si ha che $\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) = 1$, quindi $X_n \not\to 0$ q.c. Infine, se $p \geq 1$,

$$||X_n||_p^p = \mathbb{E}(X_n^p) = \left(\frac{n}{\log n}\right)^p \mathbb{E}(Y_n^p) = \left(\frac{n}{\log n}\right)^p \frac{C_p}{n^p} = \frac{C_p}{(\log n)^p}$$

quindi $X_n \to 0$ in L^p.

c) $X_n = nY_n$. Studiamo la convergenza in probabilità:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta/n) = e^{-\delta} \not\to 0 \quad \text{ se } n \to \infty$$

quindi $X_n \not\to 0$ in probabilità e, di conseguenza, X_n non converge a 0 né q.c. né in L^p.

Esercizio 8 Osserviamo che se $Y_n \sim \text{Un}(0, 1/n)$ allora $0 < Y_n < 1/n$ q.c. e $0 < n^\gamma Y_n < n^{\gamma-1}$ q.c. Allora, se $\gamma - 1 < 0$, cioè $\gamma < 1$, allora $n^\gamma Y_n \to 0$ q.c., quindi in probabilità, e, per convergenza dominata, anche in L^p per ogni $p \geq 1$. Studiamo ora il caso $\gamma \geq 1$. Per $\delta > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta/n^\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta/n^\gamma \geq 1/n \\ 1 - n \cdot \delta/n^\gamma & \text{se } \delta/n^\gamma < 1/n \end{cases}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta/n^\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \geq n^{\gamma-1} \\ 1 - \delta/n^{\gamma-1} & \text{se } \delta < n^{\gamma-1} \end{cases}$$

Allora, per $\gamma = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \geq 1 \\ 1 & \text{se } \delta < 1 \end{cases}$$

dunque $X_n \not\to 0$ in probabilità e quindi q.c. e in L^p. Se $\gamma < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = 1$$

per ogni $\delta > 0$, e ancora $X_n \not\to 0$ in probabilità, q.c. e in L^p.

Esercizio 9 Osserviamo anzitutto che $X_n = \alpha^n X_0 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$, che si verifica facilmente per induzione. Quindi[3]

$$X_n = \begin{cases} \alpha^n X_0 + \beta \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \alpha^n \Big(X_0 - \dfrac{\beta}{1-\alpha} \Big) + \dfrac{\beta}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ X_0 + n\beta & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Se $|\alpha| < 1$ allora per ogni ω,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 \cdot X_0(\omega) + \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Se $\alpha = 1$ allora $X_n = X_0 + n\,\beta$, quindi converge se e solo se $\beta = 0$ e in tal caso la v.a. limite è (ovviamente) X_0.
Se $\alpha = -1$ allora $X_{2n} = X_0$ e $X_{2n+1} = -X_0 + \beta/2$, che convergono allo stesso limite se e solo se $X_0 = -X_0 + \beta$, cioè $X_0 = \beta/2$ q.c. In tal caso, $X_n = \beta/2$ q.c. per ogni n, quindi la successione converge q.c. a $\beta/2$.
Infine, se $|\alpha| > 1$ allora X_n converge q.c. se e solo se $X_0 = \beta/1 - \alpha$ q.c., e in tal caso il limite è $\beta/1 - \alpha$.

Esercizio 10 a) Poiché X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti di L^1, abbiamo visto che $X_1X_2 \in L^1$ e $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$. Poiché $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 0$, $\mathbb{E}(X_1X_2) = 0$. Analogamente, X_1^2 e X_2^2 sono v.a. indipendenti di L^1 (perché hanno varianza) quindi $X_1^2X_2^2 \in L^1$, cioè $X_1X_2 \in L^2$, e $\mathbb{E}(X_1^2X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2) = 1$. Allora esiste la varianza di X_1X_2 e (ricordando che $\mathbb{E}(X_1X_2) = 0$) $\mathrm{Var}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1^2X_2^2) = 1$.

b) Per $n \geq 1$, sia $Y_n = X_{2n-1}X_{2n}$. Procedendo come sopra, $Y_n \in L^2$, con $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ e $\mathrm{Var}(Y_n) = 1$. Inoltre, per $k \neq n$, esiste $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_n) = \mathbb{E}(Y_k\, Y_n) = \mathbb{E}(X_{2k-1}X_{2k}X_{2k-1}X_{2k}) = 0$ perché è il prodotto delle medie. Allora, la LFGN assicura che

$$\frac{1}{n}\Big(X_1X_2 + X_3X_4 + \ldots + X_{2k-1}X_{2k} \Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to 0 \qquad \text{q.c. per } n \to \infty.$$

c) $\{X_n^2\}_n$ e $\{X_n^4\}_n$ sono successioni di v.a. indipendenti con varianza (perché $X_n \in L^8$ per ogni n). Usando la LFGN, si ha

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to \mathbb{E}(X_1^2) = 1 \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^4 \to \mathbb{E}(X_1^4) \qquad \text{q.c. per } n \to \infty$$

quindi, se $X_n \neq 0$ q.c.,

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^4} \to \frac{1}{\mathbb{E}(X_1^4)} \qquad \text{q.c. per } n \to \infty.$$

[3] Ricordiamo che, per $\rho \neq 1$, $\sum_{j=0}^{N} \rho^j = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}$.

Esercizio 11 a) La f.c. di X_n è $\varphi_n(\theta) = e^{i\theta\mu - \sigma_n^2\theta^2/2}$, che converge a $g(\theta) = e^{i\theta\mu}$ per $n \to \infty$. Poiché g è la f.c. di $X = \mu$ q.c., si ottiene $X_n \to \mu$ in legge, quindi $X_n \to \mu$ in probabilità. Studiamo la convergenza a μ in L^p: posto $Z_n = (X_n - \mu)/\sigma_n$, si ha che che $Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ e

$$\mathbb{E}(|X_n - \mu|^p) = \sigma_n^p\, \mathbb{E}(|Z_n|^p) = \sigma_n^p \cdot M_p$$

dove M_p denota il momento p-esimo di una gaussiana standard. Allora, per ogni $p > 0$, $\mathbb{E}(|X_n - \mu|^p) \to 0$ per $n \to \infty$, quindi X_n converge a μ in L^p.

b) Studiamo il comportamento delle code: fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu| > \delta) = \mathbb{P}(\sigma_n |Z_n| > \delta) = \mathbb{P}(|Z_1| > \delta/\sigma_n).$$

Ora, $\sigma_n \to 0$ quindi $\delta/\sigma_n \to \infty$. Allora, per n grande,

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu| > \delta) = \mathbb{P}(|Z_1| > \delta/\sigma_n) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\, \sigma_n\, e^{-\delta^2/(2\,\sigma_n^2)}$$

Ad esempio, se si sceglie $\sigma_n = 1/\sqrt{n}$ allora, per n grande,

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu| > \delta) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\, \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-n\,\delta^2/2},$$

quindi $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \delta)$ è una serie convergente per ogni $\delta > 0$, da cui segue che $X_n \to \mu$ q.c.
Scegliamo ora $\sigma_n = 1/\sqrt{\log n}$: si ha

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu| > \delta) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\, \frac{1}{\sqrt{\log n}}\, e^{-\delta^2/2\,\log n} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\, \frac{1}{n^{\delta^2/2}\,\log n}.$$

Quindi la serie $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - \mu| > \delta)$ non converge se $\delta^2/2 \le 1$: se si richiede l'indipendenza delle X_n, da BC2 segue che X_n non converge q.c.

Esercizio 12. Posto $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 &= \sum_{k=1}^n (X_k^2 + \bar{X}_n^2 - 2\,X_k\,\bar{X}_n) = \sum_{k=1}^n X_k^2 + n\,\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n \sum_{k=1}^n X_k \\ &= \sum_{k=1}^n X_k^2 + n\,\bar{X}_n^2 - 2n\,\bar{X}_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 - n\,\bar{X}_n^2,\end{aligned}$$

da cui segue che

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1}\,\bar{X}_n^2 = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}_n^2\Big).$$

Ora, per la LGN $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n^2 \to \mathbb{E}(X_1^2)$ q.c. e $\bar{X}_n \to \mathbb{E}(X_1)$ q.c., quindi

$$S_n^2 \to 1 \cdot \Big(\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2\Big) = \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2, \qquad \text{q.c.}$$

Infine,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^2) &= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\,\bar{X}_n^2\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2) - n\,\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big)^2\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}\Big(n\,\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big(\sum_{k,j=1}^{n} X_k\,X_j\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}\Big(n\,\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n}\sum_{k,j=1}^{n}\mathbb{E}(X_k\,X_j)\Big)
\end{aligned}
$$

Ma se $k = j$, $\mathbb{E}(X_k\,X_j) = \mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(X_1^2)$ e se $k \neq j$, $\mathbb{E}(X_k\,X_j) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}^2(X_1)$ (per via dell'indipendenza), quindi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^2) &= \frac{1}{n-1}\Big(n\,\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n}\Big(n\mathbb{E}(X_1^2) + n(n-1)\mathbb{E}^2(X_1)\Big)\Big)\\
&= \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}^2(X_1) = \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Allora, S_n^2 converge q.c. a σ^2 e si mantiene in media sempre uguale a σ^2.

Esercizio 13. Poniamo $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k))$. Usando la disuguaglianza di Chebycev, per ogni $\delta > 0$ si ha (ricordiamo che le X_k sono a due a due non correlate)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) &= \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k))\Big| > n\delta\Big)\\
&\le \frac{\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{n^2\delta^2} = \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \le \frac{\alpha_n}{\delta^2}, \qquad \text{con} \quad \alpha_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \tag{3}
$$

a) Supponiamo che $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 = 0$. In tal caso, σ_n^2 è limitata: esiste $C > 0$ tale che $\sigma_n^2 \le C$ per ogni n. Quindi, $\alpha_n \le C/n \to 0$ per $n \to \infty$ e da (3) segue che $\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \to 0$ per $n \to \infty$, cioè $Z_n \to 0$ in probabilità, o equivalentemente vale la LDGN.

b) Supponiamo ora che $C := \sum_n \sigma_n^2 < \infty$. Allora $\alpha_n \le C/n^2 \to 0$ per $n \to \infty$ e da (3) segue che $\sum_n \mathbb{P}(|Z_n| > \delta) < \infty$, quindi $Z_n \to 0$ q.c., o equivalentemente vale la LFGN.

Esercizio 15. Osserviamo che la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \geq 0$, è crescente e $f(x) \leq 1$.
Supponiamo che $X_n \to 0$ in probabilià. Allora, per $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\Big) &= \mathbb{E}\Big(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\,\mathbf{1}_{|X_n|\leq\varepsilon}\Big) + \mathbb{E}\Big(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\,\mathbf{1}_{|X_n|>\varepsilon}\Big)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)\end{aligned}$$

e quindi

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\Big(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Per l'arbitrarietà di ε, otteniamo $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}) = 0$ da cui la tesi.

Supponiamo viceversa che $\frac{|X_n|}{1+|X_n|} \to 0$ in L^1. Poiché $\{|X_n| > \varepsilon\} \subset \{\frac{|X_n|}{1+|X_n|} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\}$, usando la disuguaglianza di Markov si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\Big(\frac{|X_n|}{1+|X_n|} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big) \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathbb{E}\Big(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\Big) \to 0.$$

Esercizio 16. a) Poiché X_n è una v.a. simmetrica, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ per ogni n, dunque $\frac{1}{n}S_n$ ha media nulla. Calcoliamo $\mathrm{Var}(S_n)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_n) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k,i=2}^{n} X_k X_i\Big) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{k\neq i=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_i)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k\log k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\log k}\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n}S_n\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\log k}.$$

Ma $x \mapsto x/\log x$ è crescente per $x \geq e$, quindi

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n}S_n\Big) \leq \frac{2}{n^2\log 2} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=3}^{n}\frac{n}{\log n} = \frac{2}{n^2\log 2} + \frac{n-2}{n\log n} \to 0.$$

Ma allora $\frac{1}{n}S_n \equiv \frac{1}{n}S_n - \mathbb{E}(\frac{1}{n}S_n) \to 0$ in L^2, quindi in probabilità.
b) Per $n > 1$, si ha

$$\mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n},$$

quindi $\sum_n \mathbb{P}(X_n \geq n) = +\infty$. Poiché le X_n sono indipendenti, BC2 dà $\mathbb{P}(X_n \geq n \text{ i.o.}) = 1$, cioè q.c. si ha $X_n \geq n$ per infiniti indici n. Ora, essendo $X_n = S_n - S_{n-1}$, q.c. si ha $\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{n}S_{n-1} \geq 1$ per infiniti indici e quindi q.c.

$$\frac{1}{n}S_n > \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}S_{n-1} \geq 1$$

per infiniti indici. Se quindi $\frac{1}{n}S_n \to 0$ q.c. allora si otterrebbe $0 > 0 + 1$, da cui l'assurdo.