Esercitazione IV
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: indipendenza, 2° lemma di Borel Cantelli, σ-algebra coda.

Esercizio 1. **a)** Dato $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_m$ π-system su Ω tali che $\Omega \in \mathcal{J}_i$ e $\mathcal{J}_i \subset \mathscr{F}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$. Si ponga $\mathscr{G}_i = \sigma(\mathcal{J}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Dimostrare che:

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^m G_i) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(G_i) \quad \text{per ogni } G_1 \in \mathscr{G}_1, \ldots, G_m \in \mathscr{G}_m$$

se e solo se per ogni $k \leq m$ e per ogni $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ indici distinti si ha

$$\mathbb{P}(\cap_{\ell=1}^k J_{i_\ell}) = \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(J_{i_\ell}) \quad \text{per ogni } J_{i_1} \in \mathcal{J}_{i_1}, \ldots, J_{i_k} \in \mathcal{J}_{i_k}.$$

[Sugg.: si ricorda che se due misure finite coincidono su un π-system ed danno uguale misura a tutto lo spazio, allora coincidono sulla σ-algebra generata dal π-system]

b) Dedurre che:

b1) gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono indipendenti se e solo se per ogni n e per ogni n-upla di indici distinti $i_1, \ldots, i_n$

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \mathbb{P}(E_{i_1})\mathbb{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(E_{i_n});$$

[Sugg.: si usi la definizione di eventi indipendenti]

b2) le v.a. reali $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti se e solo se per ogni n, per ogni n-upla di indici distinti $i_1, \ldots, i_n$ e per ogni $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n).$$

[Sugg.: si ricorda che $\sigma(X_i) = \sigma(\mathcal{I}_i)$, dove $\mathcal{I}_i = X_i^{-1}\pi(\mathbb{R})$ è un π-system]

c) Dimostrare che le v.a. reali $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti se e solo se per ogni k e $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq x_k).$$

[Sugg.: si noti che $\{X_i \leq N\} \uparrow \{X_i \in \mathbb{R}\} = \Omega$ per $N \uparrow +\infty$]

Esercizio 2. Siano $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ π-systems su Ω tali che $\mathcal{I}_i \subset \mathscr{F}$ e $\Omega \in \mathcal{I}_i$, $i = 1, \dots, n$. Dimostrare che $\sigma(\mathcal{I}_1), \dots, \sigma(\mathcal{I}_n)$ sono indipendenti se e solo se

$$\mathbb{P}(I_1 \cap \ldots \cap I_n) = \mathbb{P}(I_1) \cdots \mathbb{P}(I_n), \qquad \text{per ogni } I_1 \in \mathcal{I}_1, \ldots I_n \in \mathcal{I}_n.$$

Esercizio 3. Siano X e Y due v.a. discrete e indipendenti, a valori in $E_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $E_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ rispettivamente. Indichiamo con p_X e p_Y la distribuzione (discreta, marginale) rispettivamente di X e di Y:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x),\ x \in E_X, \quad \text{e} \quad p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y),\ y \in E_Y$$

e con $p_{X\,Y}$ la distribuzione (discreta, congiunta) di (X, Y):

$$p_{X\,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y),\ (x, y) \in E_X \times E_Y.$$

a) Dimostrare che X e Y sono indipendenti se e solo se $p_{X\,Y}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$, per ogni $(x, y) \in E_X \times E_Y$.

b) Dimostrare che $Z = X + Y$ è una v.a. discreta, a valori in E_Z da determinare, con distribuzione (data dalla convoluzione discreta tra p_X e p_Y)

$$\mathbb{P}(Z = z) =: p_Z(z) = \sum_k p_X(x_k)\, p_Y(z - x_k) = \sum_j p_X(z - y_j)\, p_Y(y_j),$$

per $z \in E_Z$.

[Sugg.: si ricorda che dato un numero finito o numerabile di eventi disgiunti A_n tali che $\cup_n A_n = \Omega$ allora $\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n)$ per ogni altro evento B]

Esercizio 4. Fissato $s > 1$, sia $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$. Sia X una v.a. discreta tale che

$$\mathbb{P}(X = n) = n^{-s}/\zeta(s), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Denotiamo con P l'insieme dei numeri primi > 1 e per $p \in P$, sia $E_p = \{X \text{ è divisibile per } p\}$.

a) Dimostrare che gli eventi $(E_p : p \in P)$ sono indipendenti.

b) Dimostrare che $\mathbb{P}(\cap_{p \in P} E_p^c) = \prod_{p \in P}(1 - 1/p^s)$.

c) Dimostrare che $\{X = 1\} = \cap_{p \in P} E_p^c$ e dedurre la formula di Eulero: $1/\zeta(s) = \prod_{p \in P}(1 - 1/p^s)$.

d) Dimostrare che $\mathbb{P}(E_p \text{ i.o.}) = 0$ e $\mathbb{P}(E_p^c \text{ i.o.}) = 1$. Discutere se si tratta di risultati ovvi.

Esercizio 5. Per $d \in \mathbb{N}$ fissato, sia $\{X_{n1}, \ldots, X_{nd}\}_n$ una famiglia di v.a. indipendenti e $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ una funzione boreliana. Posto

$$Y_n = f(X_{n1}, \ldots, X_{nd}),$$

dimostrare che $Y_1, Y_2, \ldots$ sono v.a. indipendenti.

Esercizio 6. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

a) Dimostrare che le v.a. estese[1] $\limsup_n X_n$ e $\liminf_n X_n$ sono $\mathcal{T}$-misurabili, essendo $\mathcal{T}$ la σ-algebra coda[2].

b) Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\{\limsup_n X_n > x\} \subset \{X_n > x \text{ i.o.}\} \subset \{\limsup_n X_n \geq x\}$$
$$\{\liminf_n X_n < x\} \subset \{X_n < x \text{ i.o.}\} \subset \{\liminf_n X_n \leq x\}.$$

Esercizio 7. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con $X_n \sim \mathrm{Exp}(n^\alpha)$, per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Studiare le v.a. $\limsup_n X_n$ e $\liminf_n X_n$ al variare di α. Dire se esiste $\lim_{n\to\infty} X_n$ q.c. e in caso affermativo determinare tale limite.

Esercizio 8. Sia X una v.a. di legge $\mathrm{Exp}(1)$ e, per ogni $n \geq 1$, sia

$$X_n = \frac{1}{n^\alpha} X.$$

Studiare la convergenza q.c. di $\{X_n\}_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Osservare poi che $X_n \sim \mathrm{Exp}(n^\alpha)$ per ogni n e confrontare i risultati con quelli dell'Esercizio 7.

Esercizio 9. Siano $Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \ldots$ v.a. indipendenti tali che $Y_n \sim \mathrm{Exp}(n)$ e $Z_n \sim \mathrm{Be}(p)$, $n \geq 1$. Sia $\{X_n\}_n$ la successione definita da

$$X_n = Y_n \mathbf{1}_{Z_n=0} - Y_n \mathbf{1}_{Z_n=1}, \quad n \geq 1.$$

Dimostrare che $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti e studiare le v.a.

$$\underline{X} = \liminf_n X_n \quad \text{e} \quad \overline{X} = \limsup_n X_n.$$

Dire se esiste q.c. $\lim_n X_n$ ed in caso affermativo calcolare tale limite.

---

[1] Cioè, a valori in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

[2] Cioè, $\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{T}_n$ e $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.

Soluzioni

Esercizio 1 a) Poiché $\mathcal{J}_i \subset \sigma(\mathcal{J}_i) = \mathscr{G}_i$, un'implicazione è ovvia. Mostriamo quindi il "se".
Fissiamo $k \leq m-1$ indici distinti $i_1 \ldots, i_k \in \{2, \ldots, m\}$. Presi $J_{i_1} \in \mathcal{J}_{i_1}, \ldots, J_{i_k} \in \mathcal{J}_{i_k}$, definiamo

$$\begin{gathered} \mu, \nu \, : \, \mathscr{G}_1 \to [0,1] \\ \mu(G_1) = \mathbb{P}(G_1 \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) \\ \nu(G_1) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}). \end{gathered}$$

μ e ν sono due misure finite su $(\Omega, \mathscr{G}_1)$: presi $\{G_{1n}\}_n \subset \mathscr{G}_1$ disgiunti,

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n G_{1n}) \ &= \mathbb{P}\Big(\Big(\cup_n G_{1n}\Big) \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\cup_n \Big(G_{1n} \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}\Big)\Big) \\ &= \textstyle\sum_n \mathbb{P}(G_{1n} \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) = \sum_n \mu(G_{1n}) \\ \nu(\cup_n G_{1n}) \ &= \mathbb{P}(\cup_n G_{1n})\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}) \\ &= \textstyle\sum_n \mathbb{P}(G_{1n})\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}) = \sum_n \nu(G_{1n}). \end{aligned}$$

In particolare, si ha

$$\mu(J_1) = \mathbb{P}(J_1 \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) = \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}) = \nu(J_1)$$

e

$$\mu(\Omega) = \mathbb{P}(J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) = \mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}) = \nu(\Omega).$$

Dunque, μ e ν sono misure finite tali che $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ e che coincidono su $\mathcal{J}_1$. Allora, coincidono su $\mathscr{G}_1 = \sigma(\mathcal{J}_1)$.
Possiamo quindi concludere che per ogni $k \leq m-1$ indici distinti $i_1, \ldots, i_k \in \{2, \ldots, m\}$ si ha

$$\begin{gathered} \mathbb{P}(G_1 \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}) \\ \text{per ogni } G_1 \in \mathscr{G}_1, J_{i_1} \in \mathcal{J}_{i_1}, \ldots, J_{i_k} \in \mathcal{J}_{i_k}. \end{gathered} \tag{1}$$

Proseguiamo ora allo stesso modo: fissiamo $G_1 \in \mathscr{G}_1$ e per $k \leq m-2$ indici distinti $i_1, \ldots, i_k \in \{3, \ldots, m\}$ fissiamo $J_{i_1} \in \mathcal{J}_{i_1}, \ldots, J_{i_k} \in \mathcal{J}_{i_k}$. Definiamo $\mu, \nu \, : \, \mathscr{G}_2 \to [0,1]$ tramite:

$$\mu(G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) \ \text{ e } \ \nu(G_2) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k}).$$

È facile vedere che μ e ν sono due misure finite. Inoltre, da (1), segue facilmente che

$$\mu(J_2) = \nu(J_2) \text{ per ogni } J_2 \in \mathcal{J}_2 \text{ e } \mu(\Omega) = \nu(\Omega).$$

Ma allora, coincidono su $\sigma(\mathcal{J}_2) = \mathscr{G}_2$. Possiamo quindi concludere che per ogni $k \leq m-2$ indici distinti $i_1, \dots, i_k \in \{3, \dots, m\}$ si ha

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap J_{i_1} \cap \ldots \cap J_{i_k}) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(J_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(J_{i_k})$$
$$\text{per ogni } G_1 \in \mathscr{G}_1, G_2 \in \mathscr{G}_2, J_{i_1} \in \mathcal{J}_{i_1}, \dots, J_{i_k} \in \mathcal{J}_{i_k}.$$

Iterando il procedimento, si ottiene la tesi.

b1) Dalla definizione segue facilmente che $E_1, E_2, \ldots$ sono indipendenti se per ogni n e per ogni $i_1, \dots, i_n$ indici distinti

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n) \\ \text{per ogni } A_1 \in \mathscr{E}_{i_1}, A_2 \in \mathscr{E}_{i_1}, \ldots A_n \in \mathscr{E}_{i_n}\end{gathered} \tag{2}$$

dove, ricordiamo, $\mathscr{E}_i = \sigma(\{E_i\})$. Ora, $\mathcal{J}_i = \{E_i\}$ è un π-system, quindi da **a)** segue che (2) è verificata se e solo se quella fattorizzazione è valida per $A_1 \in \mathcal{J}_{i_1}, \ldots A_n \in \mathcal{J}_{i_n}$, quindi se e solo se

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \mathbb{P}(E_{i_1})\mathbb{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(E_{i_n}),$$

b2) $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti se per ogni n e per ogni $i_1, \dots, i_n$ indici distinti

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n) \\ \text{per ogni } A_1 \in \sigma(X_{i_1}), \ldots A_n \in \sigma(X_{i_n}).\end{gathered} \tag{3}$$

Ora, posto $\mathcal{J}_i = X_i^{-1}(\pi(\mathbb{R}))$, allora $\mathcal{J}_i$ è un π-system che genera $\sigma(X_i)$: da **a)** segue che (3) è verificata se e solo se quella fattorizzazione è valida per $A_1 \in \mathcal{J}_{i_1}, \ldots A_n \in \mathcal{J}_{i_n}$. Ora, se $A_k \in \mathcal{J}_{i_k}$ allora

$$A_k = X_{i_k}^{-1}((-\infty, x_k]) = \{X_{i_k} \leq x_k\}$$

per qualche $x_k \in \mathbb{R}$. Quindi (3) è vera se e solo se

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n)$$
$$\text{per ogni } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

c) Ovviamente, se per ogni n e per ogni $i_1, \ldots, i_n$ indici distinti

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n)$$
$$\text{per ogni } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

allora evidentemente

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq x_k)$$
$$\text{per ogni } k \text{ e } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo il viceversa. Fissiamo n indici distinti $i_1, \dots, i_n$ e n numeri reali $x_1, \dots, x_n$. Prendiamo ora $k = \max\{i_1, \dots, i_n\}$ e consideriamo la k-upla $y_1^{(N)}, \dots y_k^{(N)}$ così definita:

$$y_\ell^{(N)} = \begin{cases} x_j & \text{se esiste } j \text{ tale che } \ell = i_j \\ N & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ipotesi,

$$\mathbb{P}(X_1 \le y_1^{(N)}, \dots, X_k \le y_k^{(N)}) = \mathbb{P}(X_1 \le y_1^{(N)}) \cdots \mathbb{P}(X_k \le y_k^{(N)}).$$

Ora, se $\ell \ne i_j$ per ogni j e se $N \to \infty$, $\{X_\ell \le y_\ell^{(N)}\} = \{X_\ell \le N\} \uparrow \{X \in \mathbb{R}\} = \Omega$, quindi $\mathbb{P}(X_\ell \le y_\ell^{(N)}) \uparrow 1$. Inoltre, sempre per $N \to \infty$, $\{X_1 \le y_1^{(N)}, \dots, X_k \le y_k^{(N)}\} \uparrow \{X_{i_j} \le x_j, j = 1, \dots, n, \text{ e } X_\ell \in \mathbb{R}, \ell \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}\} = \{X_{i_1} \le x_1, \dots, X_{i_n} \le x_n\}$, quindi $\mathbb{P}(X_1 \le y_1^{(N)}, \dots, X_n \le y_n^{(N)}) \uparrow \mathbb{P}(X_{i_1} \le x_1, \dots, X_{i_n} \le x_n)$. Ma allora passando al limite per $N \to \infty$, si ottiene

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \le x_1, \dots, X_{i_n} \le x_{i_n}) = \mathbb{P}(X_{i_1} \le x_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \le x_{i_n})$$

e la tesi è dimostrata.

Esercizio 2 Se $\sigma(\mathcal{I}_1), \dots \sigma(\mathcal{I}_n)$ sono indipendenti, allora quella fattorizzazione è evidentemente valida. Viceversa, occorre dimostrare che, fissato k e fissati k indici distinti $i_1, \dots, i_k$ di $1, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}) \quad \text{per ogni } A_{i_1} \in \sigma(\mathcal{I}_{i_1}), \dots A_{i_k} \in \sigma(\mathcal{I}_{i_k}).$$

Usando l'Esercizio 1 **a)**, questa fattorizzazione è valida se vale in particolare scegliendo $A_{i_1} = I_{i_1} \in \mathcal{I}_{i_1}, \dots A_{i_k} = I_{i_k} \in \mathcal{I}_{i_k}$. Infatti, per ogni $\ell = 1, \dots, n$, prendiamo

$$I_\ell = \begin{cases} I_{i_j} & \text{se esiste } j = 1, \dots, k \text{ t.c. } \ell = i_j \\ \Omega & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché $\Omega \in \mathcal{I}_\ell$ per ogni ℓ, allora $I_\ell \in \mathcal{I}_\ell$ per ogni ℓ, quindi

$$\mathbb{P}(\cap_{j=1}^k I_{i_j}) = \mathbb{P}(\cap_{\ell=1}^n I_\ell) = \prod_{\ell=1}^n \mathbb{P}(I_\ell) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(I_{i_j}).$$

Esercizio 3 a) Supponiamo $p_{X\,Y}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$, per ogni $(x, y) \in E_X \times E_Y$. Per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathbb{P}(X \le \xi, Y \le \eta) = \sum_{x \in E_X, x \le \xi} \sum_{y \in E_Y, y \le \eta} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x \in E_X, x \le \xi} \sum_{y \in E_Y, y \le \eta} p_{X\,Y}(x,y) = \sum_{x \in E_X, x \le \xi} \sum_{y \in E_Y, y \le \eta} p_X(x)\, p_Y(y)$$
$$= \Big(\sum_{x \in E_X, x \le \xi} p_X(x) \Big) \cdot \Big(\sum_{y \in E_Y, y \le \eta} p_Y(y) \Big) = \mathbb{P}(X \le \xi)\, \mathbb{P}(Y \le \eta),$$

dunque X e Y sono indipendenti. Viceversa, supponiamo che X e Y siano indipendenti. Se $x \in E_X$ e $y \in E_Y$, allora $A_x = \{X = x\} \in \sigma(X)$ e $A_y = \{Y = y\} \in \sigma(Y)$, dunque

$$p_{X\,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(A_x \cap A_y)$$
$$= \mathbb{P}(A_x)\mathbb{P}(A_y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = P_X(x)\, p_Y(y),$$

da cui la tesi.

b) Z è una v.a. perché somma di due v.a. (la somma di due funzioni misurabili è misurabile). Inoltre, Z assume i valori $x_k + y_j$, al variare di k e j, cioè $E_Z = \{z = x_k + y_j \,:\, x_k \in E_X, y_j \in E_Y\}$, quindi Z è una v.a. discreta. Poi, ricordando che $\Omega = \cup_k \{X = x_k\}$, per $z \in E_Z$,

$$p_Z(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \sum_k \mathbb{P}(Z = z, X = x_k)$$
$$= \sum_k \mathbb{P}(X + Y = z, X = x_k) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = z - x_k).$$

Ora, poiché X e Y sono indipendenti, $\mathbb{P}(X = x_k, Y = z - x_k) = \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = z - x_k)$, da cui segue che

$$p_Z(z) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = z - x_k)$$
$$= \sum_k \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = z - x_k) = \sum_k p_X(x_k) p_Y(z - x_k).$$

Usando $\Omega = \cup_j \{Y = y_j\}$, allo stesso modo si ottiene

$$p_Z(z) = \sum_j p_X(z - y_j) p_Y(y_j).$$

Esercizio 4 a) Basta far vedere che $\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{p_k})$, per ogni n e $p_1, \ldots, p_n$ primi.
Intanto, si ha

$$E_p = \{X \text{ è divisibile per } p\} = \{X = pk \text{ per qualche } k\} = \cup_{k \ge 1} \{X = pk\}$$

e l'unione è ovviamente disgiunta, quindi

$$\mathbb{P}(E_p) = \sum_{k \ge 1} \mathbb{P}(X = pk) = \sum_{k \ge 1} (pk)^{-s}/\zeta(s) = p^{-s}/\zeta(s) \sum_{k \ge 1} k^{-s} = p^{-s}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\cap_{k=1}^n E_{p_k} &= \{X \text{ è divisibile per } p_1, p_2, \dots p_n\}\\ &= \{X = p_1 p_2 \cdots p_n\, k \text{ per qualche } k\}\\ &= \cup_{k\geq 1}\{X = p_1 p_2 \cdots p_n\, k\},\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}) &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X = p_1 p_2 \cdots p_n\, k) = \sum_{k\geq 1}(p_1 p_2 \cdots p_n\, k)^{-s}/\zeta(s)\\ &= (p_1 p_2 \cdots p_n)^{-s}/\zeta(s)\sum_{k\geq 1} k^{-s} = (p_1 p_2 \cdots p_n)^{-s}.\end{aligned}$$

Allora,

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}) = (p_1 p_2 \cdots p_n)^{-s} = \prod_{k=1}^n p_k^{-s} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{p_k}).$$

b) Indichiamo con $\{p_k\}_k$ la successione dei numeri primi > 1 e poniamo $G_n = \cap_{k=1}^n E_{p_k}^c$. Allora $G_n \downarrow G = \cap_{p>1} E_p^c$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{p\in P} E_p^c) &= \mathbb{P}(G) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(G_n) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}^c)\\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{p_k}^c) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n (1 - 1/p_k^s) = \prod_{p\in P}(1 - 1/p^s)\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che anche gli eventi $(E_p^c : p \text{ primo})$ sono indipendenti.

c) Basta dimostrare che i due complementari sono uguali, cioè $\{X > 1\} = \cup_{p>1} E_p$:

- $\{X > 1\} \subset \cup_{p>1} E_p$: se $X(\omega) > 1$ allora esiste un primo $p > 1$ tale che $X(\omega)$ è divisibile per p, quindi $\omega \in \cup_{p>1} E_p$;

- $\cup_{p>1} E_p \subset \{X > 1\}$: se $\omega \in \cup_{p>1} E_p$ allora $X(\omega)$ è divisibile per un primo $p > 1$, quindi $X(\omega) > 1$.

Allora, $1/\zeta(s) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\cap_{p>1} E_p^c) = \prod_{p>1}(1 - 1/p^s)$.

c) Abbiamo visto che $\mathbb{P}(E_p) = 1/p^s$, quindi $\sum_p \mathbb{P}(E_p) < \infty$. Da BC1 segue allora che $\mathbb{P}(E_p \text{ i.o.}) = 0$. Poi, $\mathbb{P}(E_p^c) = 1 - 1/p^s$, quindi $\sum_p \mathbb{P}(E_p^c) = \infty$. Poiché gli E_p^c sono indipendenti, allora si può usare BC2, che dà $\mathbb{P}(E_p^c \text{ i.o.}) = 1$. Questi due risultati non sono certamente sorprendenti. Infatti, ricordando che l'evento $\{A_n \text{ i.o.}\}$ significa che A_n si verifica per infiniti indici n, allora $\mathbb{P}(E_p \text{ i.o.}) = 0$ dice che l'evento "X è divisibile per infiniti numeri primi" ha probabilità 0 (i.e. è un evento impossibile), il che è piuttosto ovvio: X è un numero naturale, seppur aleatorio. Analogamente, $\mathbb{P}(E_p^c \text{ i.o.}) = 1$ dice che l'evento "X non è divisibile per infiniti numeri primi" ha probabilità 1 (i.e. è un evento certo), che ancora non ci sorprende sempre perché X è un naturale.

Esercizio 5. Basta osservare che $\sigma(Y_n) \subset \sigma(X_{n1}, \dots X_{nd})$.

Esercizio 6 a) Basta dimostrare che $\limsup_n X_n$ è $\mathcal{T}_N$-misurabile, per ogni N. Si ha
$$\limsup_n X_n = \inf_n \sup_{k>n} X_k = \inf_{n\geq N} \sup_{k>n} X_k.$$
Ora, per $n \geq N$, $Y_n := \sup_{k>n} X_k$ è misurabile rispetto alla σ-algebra $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) = \mathcal{T}_n$ e $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_N$, dunque Y_n è $\mathcal{T}_N$-misurabile. Quindi, $\limsup_n X_n = \inf_{n\geq N} Y_n$ rimane $\mathcal{T}_N$-misurabile, da cui la tesi.

b) Dimostriamo che $\{\limsup_n X_n > x\} \subset \{X_n > x \text{ i.o.}\}$. Si ha:

$\omega \in \{\limsup_n X_n > x\} \Rightarrow \inf_n \sup_{k\geq n} X_k(\omega) > x \Rightarrow \forall n, \sup_{k\geq n} X_k(\omega) > x$ $\Rightarrow \forall n\ \exists k \geq n$ t.c. $X_k(\omega) > x \Rightarrow \omega \in \cap_n \cup_{k\geq n} \{X_k > x\} = \{X_n > x \text{ i.o.}\}$.

Dimostriamo che $\{X_n > x \text{ i.o.}\} \subset \{\limsup_n X_n \geq x\}$. Si ha:

$\omega \in \{X_n > x \text{ i.o.}\} \Rightarrow \forall n\ \exists k \geq n$ t.c. $X_k(\omega) > x \Rightarrow \forall n, \sup_{k\geq n} X_k(\omega) > x$ $\Rightarrow \lim_n \sup_{k\geq n} X_k(\omega) \geq x \Rightarrow \omega \in \{\limsup_n X_n \geq x\}$.

Il resto segue in modo analogo.

Esercizio 7 La legge 0-1 di Kolmogorov garantisce che esistono due costanti $c \leq C$ non negative (perché le v.a. sono esponenziali) ed eventualmente uguali a $+\infty$ tali che
$$\liminf_n X_n = c \text{ q.c. e } \limsup_n X_n = C \text{ q.c.}$$
Cominciamo con la v.a. $\limsup_n X_n$. Osserviamo che, per $a > 0$,
$$\mathbb{P}(X_n > a) = e^{-an^\alpha}$$
e quindi
$$\sum_n \mathbb{P}(X_n > a) \text{ è una serie } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$
Usando i due lemmi di Borel Cantelli (le X_n sono indipendenti), possiamo dire che per $a > 0$,
$$\mathbb{P}(X_n > a \text{ i.o.}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$
Ora, usando l'Esercizio 6 abbiamo:

- se $\alpha > 0$, si ha $\mathbb{P}(\limsup X_n > a) = 0$ per ogni $a > 0$, e quindi $\limsup_n X_n = 0$ q.c.

• se $\alpha \leq 0$, si ha $\mathbb{P}(\limsup X_n \geq a) = 1$ per ogni $a > 0$, e quindi $\limsup_n X_n = +\infty$ q.c.

Vediamo ora cosa succede a $\liminf_n X_n$. Ma $0 \leq \liminf_n X_n \leq \limsup_n X_n$, dunque possiamo subito dire che

• se $\alpha > 0$, si ha $\mathbb{P}(\limsup X_n > a) = 0$ per ogni $a > 0$, e quindi $\limsup_n X_n = 0$ q.c.

Assumiamo quindi $\alpha \leq 0$. Si ha

$$\mathbb{P}(X_n < a) = 1 - e^{-an^\alpha}$$

da cui segue che

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n < a) \text{ è una serie } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha < -1 \\ \text{divergente} & \text{se } -1 \leq \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Usando i due lemmi di Borel Cantelli (le X_n sono indipendenti), possiamo dire che per $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X_n < a \text{ i.o.}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < -1 \\ 1 & \text{se } -1 \leq \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Usando ancora l'Esercizio 6 abbiamo:

• se $\alpha < -1$, si ha $\mathbb{P}(\liminf X_n < a) = 0$ per ogni $a > 0$, e quindi $\liminf_n X_n = +\infty$ q.c.

• se $-1 \leq \alpha \leq 0$, si ha $\mathbb{P}(\liminf X_n \leq a) = 1$ per ogni $a > 0$, e quindi $\liminf_n X_n = 0$ q.c.

Ricapitolando, possiamo dire che:

✓ $\alpha < -1$: $\liminf_n X_n = \limsup_n X_n = +\infty$ q.c., quindi esiste $\lim_n X_n = +\infty$ q.c.;

✓ $-1 \leq \alpha \leq 0$: $\liminf_n X_n = 0$ q.c. e $\limsup_n X_n = +\infty$ q.c., quindi non esiste $\lim_n X_n$ q.c.;

✓ $\alpha > 0$: $\liminf_n X_n = \limsup_n X_n = 0$ q.c., quindi esiste $\lim_n X_n = 0$ q.c.

Esercizio 8 Sia $N = \{\omega : X(\omega) \leq 0\}$. Allora $\mathbb{P}(N) = 0$ e per ogni $\omega \notin N$ si ha

$$\lim_n X_n(\omega) = \lim_n \frac{1}{n^\alpha} X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ X(\omega) & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

Dunque, il $\lim_n X_n$ q.c. esiste sempre, per ogni α.

Osserviamo che $X_n \sim$Exp(n^α) perché, per $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X_n > a) = \mathbb{P}(X > n^\alpha a) = e^{-n^\alpha a}.$$

Tuttavia, quanto appena dimostrato non è in contraddizione con l'Esercizio 7 perché qui la successione non è fatta da v.a. indipendenti!

Esercizio 9 Le v.a. X_n sono indipendent e quindi, per la legge 0-1 di Kolmogorov, esistono due costanti $-\infty \leq c \leq C \leq +\infty$ tali che

$$\underline{X} = \liminf_n X_n = c \text{ q.c. e } \overline{X} = \limsup_n X_n = C \text{ q.c.}$$

Cominciamo con la v.a. $\limsup_n X_n$. Si ha $\mathbb{P}(X_n > x) = \mathbb{P}(X_n > x, Z_n = 0) + \mathbb{P}(X_n > x, Z_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n > x, Z_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n < -x, Z_n = 1)$ e quindi

$$\mathbb{P}(X_n > x) = \begin{cases} (1-p)e^{-nx} & \text{se } x > 0 \\ 1 - pe^{nx} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Allora,

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n > x) \text{ è una serie } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } x > 0 \\ \text{divergente} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Usando i due lemmi di Borel Cantelli e l'Esercizio 6 otteniamo

$$\mathbb{P}(\overline{X} > x) = 0 \text{ se } x > 0 \text{ e } \mathbb{P}(\overline{X} > x) = 0 \text{ se } x \leq 0$$

il che dà $\overline{X} = 0$ q.c. Infatti,

$$\mathbb{P}(\overline{X} = 0) = \lim_n \mathbb{P}\Big(-\frac{1}{n} \leq \overline{X} \leq \frac{1}{n}\Big) = \lim_n \Big(\mathbb{P}\Big(\overline{X} \geq -\frac{1}{n}\Big) - \mathbb{P}\Big(\overline{X} > \frac{1}{n}\Big)\Big) = 1.$$

Analogamente, si ha

$$\mathbb{P}(X_n < x) = \begin{cases} 1 - (1-p)e^{-nx} & \text{se } x \geq 0 \\ pe^{nx} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\sum_n \mathbb{P}(X_n < x) \text{ è una serie } \begin{cases} \text{divergente} & \text{se } x \geq 0 \\ \text{convergente} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Usando i due lemmi di Borel Cantelli e l'Esercizio 6 otteniamo

$$\mathbb{P}(\underline{X} < x) = 0 \text{ se } x < 0 \text{ e } \mathbb{P}(\underline{X} < x) = 1 \text{ se } x \geq 0$$

il che dà $\underline{X} = 0$ q.c. In particolare, esiste $\lim_n X_n = 0$ q.c.