Esercitazione III
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: variabili aleatorie e σ-algebre generate; leggi.

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a.

a) Sia $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $X \equiv a$ se e solo se $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$.

b) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathscr{F}$, con $a \neq b$ e $A \neq \emptyset, \Omega$.

b1) Dimostrare che $X = a\,\mathbf{1}_A + b\,\mathbf{1}_{A^c}$ se e solo se $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

b2) Dimostrare che $X = a\,\mathbf{1}_A + b\,\mathbf{1}_{A^c}$ se e solo se X è una trasformazione affine di una v.a. bernoulliana, di cui si preciserà il parametro.

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a.

a) Dimostrare che se X è discreta, cioè $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, allora $\sigma(X) = \sigma(\mathscr{C})$ dove $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ è la partizione di Ω definita da $C_i = X^{-1}(\{x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$.

b) Sia $\mathscr{C}$ una partizione al più numerabile di Ω. Dimostrare più in generale che $\sigma(X) = \sigma(\mathscr{C})$ se e solo se X è costante su ciascun elemento di $\mathscr{C}$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a.

a) Posto
$$\mathscr{G}(X) = \{X^{-1}(A)\,;\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} = X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})),$$
dimostrare che $\sigma(X) = \mathscr{G}(X)$.

b) Posto
$$\pi(X) = \{X^{-1}((-\infty, c])\,;\, c \in \mathbb{R}\} = X^{-1}(\pi(\mathbb{R})),$$
dimostrare che $\sigma(X) = \sigma(\pi(X))$.

[Sugg.: dimostrare che, posto $\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(A) \in \sigma(\pi(X))\}$, allora $\mathscr{E}$ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$ tale che $\pi(\mathbb{R}) \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$.]

Esercizio 4. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano X e Y due v.a. Dimostrare che $\sigma(X) = \sigma(Y)$ se e solo se esistono due funzioni boreliane h_1 e h_2 tali che $X = h_1 \circ Y$ e $Y = h_2 \circ X$.

Esercizio 5. Sia $\{p_k\}_{k\geq 1}$ una successione di numeri non negativi tali che $\sum_{k\geq 1} p_k = 1$. Si definisca

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[x]} p_k & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Verificare che F è una funzione di distribuzione[1].

b) Trovare uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ed una v.a. X su tale spazio che ha F come funzione di distribuzione.

Esercizio 6. Sia dato $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, con $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e, per $A \in \mathscr{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \lambda \int_A e^{-\lambda\,\xi}\, \mathbf{1}_{\xi>0}\, d\xi,$$

con $\lambda > 0$ fissato. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$.

a) Verificare che $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità e che X è una v.a., con legge $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

b) Posto $Y = \mathbf{1}_{X\in(0,1)} - \mathbf{1}_{X\in\mathbb{N}}$, scrivere $\sigma(Y)$ e dire qual è la legge di Y.

c) Sia $Z = [X]$ ($[\,\cdot\,]$ = parte intera) quando $X \geq 0$ e $Z = 0$ altrimenti. Provare che Z è una v.a. e che la legge Λ_Z di Z è una legge geometrica, di cui si preciserà il parametro.

Esercizio 7. Siano $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e

$$\mathbb{P}(A) = c \int_A x e^{-x} \mathbf{1}_{x>0}\, dx, \quad A \in \mathscr{F}.$$

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$.

a) Determinare c affinché $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sia uno spazio si probabilità.

b) Verificare che X è una v.a. e calcolare la legge Λ_X di X.

c) Posto

c1) $Z = \mathbf{1}_{X\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$,
c2) $Z = \mathbf{1}_{X\in(0,2)} - \mathbf{1}_{X\in[1,+\infty)}$,
c3) $Z = X + \mathbf{1}_{X\in(-1,0)}$,

dire se Z è una v.a. e, in caso affermativo, scrivere la legge Λ_Z di Z.

[1] Ovvero, 1) F è non decrescente; 2) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; 3) F è càdlàg e in particolare, per ogni x si ha $F(x^-) \leq F(x) = F(x^+)$, dove si è posto $F(x^\pm) = \lim_{y\to x^\pm} F(y)$.

Soluzioni

Esercizio 1 a) Se $X = a$ allora per ogni boreliano B,

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a \notin B \\ \Omega & \text{se } a \in B \end{cases}$$

quindi $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$.
Viceversa, supponiamo che $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$. Se per assurdo X potesse assumere due valori a_1, a_2 diversi, allora $A_1 = X^{-1}(\{a_1\})$ e $A_2 = X^{-1}(\{a_2\})$ sarebbero due elementi di $\sigma(X)$ disgiunti e non vuoti, il che non è possibile. Quindi X assume un unico valore a.

b1) Supponiamo $X = a\,\mathbf{1}_A + b\,\mathbf{1}_{A^c}$. Allora per ogni boreliano B,

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a, b \notin B \\ A & \text{se } a \in B \text{ e } b \notin B \\ A^c & \text{se } a \notin B \text{ e } b \in B \\ \Omega & \text{se } a, b \in B \end{cases}$$

quindi $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.
Viceversa, sia $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Supponiamo per assurdo che X possa assumere $n \geq 3$ valori diversi. Se a_1, a_2, a_3 denotano tre di questi valori diversi, allora $A_1 = X^{-1}(\{a_1\})$, $A_2 = X^{-1}(\{a_2\})$ e $A_3 = X^{-1}(\{a_3\})$ sono tre elementi di $\sigma(X)$ disgiunti e non vuoti, il che non è possibile. Quindi X assume o un solo valore α oppure due valori α e β distinti. Ovviamente il primo caso qui non è possibile, altrimenti da **a)** si avrebbe $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$. Quindi esistono α, β diversi tali che $X = \alpha\,\mathbf{1}_\Gamma + \beta\,\mathbf{1}_{\Gamma^c}$, con $\Gamma = X^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathscr{F}$ e $\Gamma \neq \emptyset, \Omega$. Ora, come visto sopra, in tal caso si avrebbe $\sigma(X) = \{\emptyset, \Gamma, \Gamma^c, \Omega\}$ e poiché per ipotesi $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, dev'essere $\Gamma = A$ oppure $\Gamma = A^c$, da cui la tesi.

b2) Posto $Y = \mathbf{1}_A$, si ha $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - Y$ e $X = a\mathbf{1}_A + b\mathbf{1}_{A^c}$ se e solo se $X = (a-b)Y + 1$, cioè X è una trasformazione affine di Y. Ora, Y può assumere solo i valori 0 o 1, dunque è bernoulliana di parametro $p = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(A)$.

Esercizio 2. a) Si ha:
$B \in \sigma(X) \Leftrightarrow$
esiste $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ t.c. $B = X^{-1}(A) \Leftrightarrow$
esiste $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ t.c. $B = \bigcup_i X^{-1}(A \bigcap \{x_i\}) = \bigcup_{i\,:\,x_i \in A} X^{-1}(\{x_i\}) \Leftrightarrow$
esiste I_B tale che $B = \bigcup_{i \in I_B} C_i \Leftrightarrow$
$B \in \sigma(\mathscr{C})$.

b) Supponiamo che $\sigma(X) = \sigma(\mathscr{C})$ e che, per assurdo, esista $C \in \mathscr{C}$ tale che $\omega_1, \omega_2 \in C$, con $\omega_1 \neq \omega_2$, e $a_1 = X(\omega_1) \neq X(\omega_2)$. Poniamo $A_1 =$

$X^{-1}(\{a_1\})$: $A_1 \in \sigma(X) = \sigma(\mathscr{C})$, perché $\{a_1\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Quindi[2] necessariamente dev'essere $A_1 \supseteq C$, il che è assurdo perché $\omega_2 \in C$ ma $\omega_2 \notin A_1$.

Viceversa, supponiamo che X sia costante su ciascun elemento di $\mathscr{C}$. Posto a_C il valore che X assume su $C \in \mathscr{C}$, si ha ovviamente che $X(\Omega) = \{a_C\,;\, C \in \mathscr{C}\}$. Quindi, per $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$X^{-1}(A) = \bigcup_{C\,:\,a_C \in A} C$$

(con $\bigcup_{C\,:\,a_C\in A} C = \emptyset$ se $\{C \,:\, a_C \in A\} = \emptyset$), da cui segue che $\sigma(X) \subset \sigma(\mathscr{C})$. Poi, essendo, per $C \in \mathscr{C}$, $C = X^{-1}(\{a_C\})$, si ha $\mathscr{C} \subset \sigma(X)$ e quindi $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(X)$, da cui la tesi.

Esercizio 3. a) È facile vedere che $\mathscr{G}(X)$ è una σ-algebra. Mostriamo che $\mathscr{G}(X) \subset \sigma(X)$. Infatti, se $\Gamma \in \mathscr{G}(X)$ esiste $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tale che $\Gamma = X^{-1}(A)$. Ma X è $\sigma(X)$-misurabile, quindi $X^{-1}(A) \in \sigma(X)$, da cui la tesi.

b) Essendo $\pi(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$, si ha $\pi(X) = X^{-1}(\pi(\mathbb{R})) \subset X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X)$ e quindi $\sigma(\pi(X)) \subset \sigma(X)$. Per l'inclusione inversa, definiamo

$$\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \,:\, X^{-1}(A) \in \sigma(\pi(X))\}$$

Basterà dimostrare che $\mathscr{G} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ perché in tal caso si avrebbe $\sigma(\pi(X)) \supset X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X)$.
È immediato verificare che $\mathscr{G} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e che $\mathscr{G}$ è una σ-algebra tale che $\mathscr{G} \supset \pi(\mathbb{R})$. Ma allora $\sigma(\pi(\mathbb{R})) \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$, da cui la tesi.

Esercizio 4. supponiamo che $\sigma(X) = \sigma(Y)$. Allora, X è $\sigma(Y)$-misurabile e Y è $\sigma(X)$-misurabile. Esistono quindi due funzioni h_1 e h_2 tali che $X = h_1(Y)$ e $Y = h_2(X)$.

Viceversa, supponiamo che esistano due funzioni boreliane h_1 e h_2 tali che $X = h_1 \circ Y$ e $Y = h_2 \circ X$. Da $X = h_1 \circ Y$ otteniamo che $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$; da $Y = h_2 \circ X$ otteniamo che $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$, da cui la tesi.

Esercizio 5. a) $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = \sum_{k\geq 1} p_k = 1$. Banalmente, si ha che F è non descrescente. Infine, per $x < 1$, $F \equiv 0$, quindi in particolare è continua. Se invece $x > 1$, F è ovviamente continua in x se x non è un intero. Prendiamo allora x intero. Per ogni n grande abbastanza, $F(x+1/n) = F(x)$ e $F(x - 1/n) < F(x)$, da cui F è in effetti una funzione di distribuzione.

b) Si potrebbe usare il teorema di rappresentazione di Skorohod. Oppure, si può prendere: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ e, per $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in A} p_k$. Poi, presa $X(\omega) = \omega$, si trova subito che $F_X \equiv F$.

[2] Ricordiamo che $\sigma(\mathscr{C})$ è costituita da tutte le possibili unioni di elementi di $\mathscr{C}$, cfr. Esercitazione I.

Esercizio 6. **a)** $\mathbb{P}(A)$ è della forma $\int_A g(\xi)\,d\xi$, con $g(\xi) = \lambda\, e^{-\lambda\xi}\,\mathbf{1}_{\xi>0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathrm{Leb})$, quindi $\mathbb{P}$ è una misura su $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, perché, come applicazione su $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, è non negativa (lo è la funzione integranda) e σ-additiva (lo è l'integrale di Lebesgue). Inoltre, $\int_{\mathbb{R}} g(\xi)\,d\xi = 1$, quindi $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità.
X è l'applicazione identica, quindi è misurabile, dunque X è una v.a. Inoltre,

$$\Lambda_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega \,:\, X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(A) = \int_A g(\xi)\,d\xi$$

dove g è la densità esponenziale di parametro λ, quindi $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

b) Y è una funzione (misurabile) di X, dunque è una v.a. Osserviamo che Y può assumere solo tre valori: $Y(\omega) = 1$ per $\omega \in A_1 = (0,1)$, $Y(\omega) = -1$ per $\omega \in A_2 = \mathbb{N}$, $Y(\omega) = 0$ per $\omega \in A_3 = (0,1)^c \cap \mathbb{N}^c$. Y è quindi una v.a. discreta a valori in $E_Y = \{-1, 0, 1\}$ tale che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = -1) &= \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 0,\\
\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \in (0,1)) &= \int_0^1 \lambda\, e^{\lambda\xi}\,d\xi = 1 - e^{-\lambda},\\
\mathbb{P}(Y = 0) &= 1 - 0 - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Ma allora Y è una bernoulliana di parametro $p = 1 - e^{-\lambda}$.

c) Si ha $Z = h \circ X$, dove $h(x) = [x]$ se $x \geq 0$ e $h = 0$ altrimenti. Osserviamo che $\{h \leq c\} = \emptyset \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ se $c < 0$ e $\{h \leq c\} = (-\infty, [c] + 1) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ se $c \geq 0$. Quindi h è boreliana e allora $Z = h \circ X$ è misurabile, cioè Z è una v.a. che può assumere i valori $k = 0, 1, \ldots$ Per tali k si ha

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k + 1) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = p^k(1 - p)$$

essendo $p = 1 - e^{-\lambda}$. Quindi Z è una $\mathrm{Ge}(p)$.

Esercizio 7. **a)** La funzione d'insieme $\mathbb{P}$ è non negativa (lo è la funzione integranda) ed è σ-additiva su $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (lo è l'integrale di Lebesgue). Inoltre,

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = c \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = c$$

quindi $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità se e solo se $c = 1$.

b) X è l'applicazione identica, quindi è misurabile. La sua legge è data da

$$\Lambda_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(A) = 2 \int_{A \bigcap (0,+\infty)} x e^{-x^2} dx.$$

La sua funzione di distribuzione si può scrivere esplicitamente. Infatti, $F_X(x) = 0$ per $x < 0$ e per $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_0^x \xi e^{-\xi} dx = 1 - e^{-x}(x+1).$$

Peraltro, $X \sim \Gamma(2,1)$.

c) Ricordando che $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è boreliana sse $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, otteniamo che tutte le Z proposte sono v.a., essendo funzioni (misurabili) della v.a. X. Vediamone la legge.

c1) Z è discreta: $Z(\Omega) = \{0,1\}$. Osserviamo che

$$\mathbb{P}(Z \neq 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = 0$$

perché $\mathbb{Q} \bigcap (0,1)$ è un insieme di Leb-misura nulla. Quindi $Z = 0$ q.c., cioè $\Lambda_Z = \delta_{\{0\}}$.

c2) Z è discreta: $Z(\Omega) = \{0, 1, -1\}$ e

$$\begin{aligned} A_1 &= Z^{-1}(\{0\}) = (-\infty, 0] \bigcup [1,2] \\ A_2 &= Z^{-1}(\{1\}) = (0,1) \\ A_1 &= Z^{-1}(\{-1\}) = [2, +\infty) \end{aligned}$$

Quindi, si ha

$$\Lambda_Z = a_1 \delta_{\{0\}} + a_2 \delta_{\{1\}} + a_3 \delta_{\{-1\}}$$

dove

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbb{P}(Z = 0) = 2 \int_{A_1 \bigcap (0,+\infty)} x e^{-x^2} dx = \int_1^2 2x e^{-x^2} dx = e^{-1} - e^{-4} \\ a_2 &= \mathbb{P}(Z = 1) = 2 \textstyle\int_{A_2 \bigcap (0,+\infty)} x e^{-x^2} dx = \int_0^1 2x e^{-x^2} dx = 1 - e^{-1} \\ a_3 &= \mathbb{P}(Z = -1) = 2 \int_{A_3 \bigcap (0,+\infty)} x e^{-x^2} dx = \int_2^{+\infty} 2x e^{-x^2} dx = e^{-4} \end{aligned}$$

c3) Osserviamo che $\mathbf{1}_{(-1,0)} = 0$ q.c. perché

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_{(-1,0)} \neq 0) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_{(-1,0)} = 1) = 2 \int_{(-1,0) \bigcap (0,+\infty)} x e^{-x^2} dx = 0.$$

Ma allora, $Z = X$ q.c. e quindi $\Lambda_Z = \Lambda_X$.