

ESERCITAZIONE II
 COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ
 A.A. 2011/2012

Argomenti: misure; spazi di probabilità.

Esercizio 1. Sia (S, Σ, μ) uno spazio di misura. Si ricorda che presi $A, B \in \Sigma$ allora $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ e se μ è una misura finita allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

a) Dimostrare che dati $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ allora

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

b) Si supponga μ misura finita. Dimostrare che vale la *formula di inclusione/esclusione*: presi $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ allora

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = & \sum_{k: k \leq n} \mu(A_k) - \sum_{i, j: i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i, j, k: i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ & - \dots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Esercizio 2. [Misure discrete] Sia S un insieme finito o numerabile e $\gamma : S \rightarrow [0, +\infty)$. Determinare una σ -algebra Σ e una misura μ su (S, Σ) tali che

$$\mu(\{s\}) = \gamma(s), \quad \text{per ogni } s \in S.$$

Dire sotto quali condizioni

- a) μ è una misura finita;
- b) μ è una misura σ -finita;
- c) (S, Σ, μ) è uno spazio di probabilità.

Esercizio 3. [Massa di Dirac e misure discrete]

a) Sia (S, Σ) uno spazio misurabile. Fissato $s \in S$, sia

$$\Sigma \ni A \mapsto \delta_{\{s\}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in A \\ 0 & \text{se } s \notin A. \end{cases}$$

Verificare che $\delta_{\{s\}}$ è una misura su (S, Σ) , detta *misura (o massa) di Dirac concentrata in s*.

- b) Siano $s_1, s_2, \dots$ una quantità finita o numerabile di punti distinti di S e siano $p_1, p_2, \dots$ altrettanti numeri non negativi. Sia

$$\Sigma \ni A \mapsto \mu(A) = \sum_k p_k \delta_{\{s_k\}}(A). \quad (1)$$

Mostrare che μ è una misura su (S, Σ) . Sotto quali condizioni μ è una misura di probabilità?

- c) Una misura ν su $(E, \mathcal{E})$ si dice discreta se esiste una quantità finita o numerabile di punti $e_1, e_2, \dots$ di E e di numeri non negativi $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ tale che per ogni $A \in \mathcal{E}$

$$\nu(A) = \sum_{i: e_i \in A} \gamma_i \quad (2)$$

(si ponga, qui e nel seguito, $\sum_{i: e_i \in A} \alpha_i = 0$ se $\{i : e_i \in A\} = \emptyset$). Verificare che (2) definisce effettivamente una misura su $(E, \mathcal{E})$ e che è discreta se e solo se è una combinazione lineare di masse di Dirac come in (1).

Esercizio 4. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. *discreta*, cioè X è una v.a. reale tale che l'insieme $E = X(\Omega)$ dei valori che può assumere è finito o numerabile. Indichiamo con $x_1, x_2, \dots$ i valori che può assumere ($E = \{x_1, x_2, \dots\}$) e con $p_1, p_2, \dots$ la *distribuzione* di X :

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad \text{per ogni } k.$$

- a) Verificare che dev'essere $p_k \geq 0$ e $\sum_k p_k = 1$.
b) Mostrare che

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k: x_k \in A} p_k = \sum_i p_i \delta_{\{x_i\}}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

e dedurre che la legge di una v.a. discreta è una misura (di probabilità) discreta su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- c) Detta F_X la funzione di distribuzione di X ($F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$), mostrare che

$$F_X(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dedurre che per v.a. discrete F_X è costante a tratti e salta nei punti x_k con salto pari a p_k .

Esercizio 5. Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\mathbb{P}_X$ la sua legge:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio di probabilità.

Esercizio 6. Siano X e Y due v.a. su $\mathbb{R}$, con funzione di distribuzione rispettivamente $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ e $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$, $y \in \mathbb{R}$, e legge $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ e $\mathbb{P}_Y(A) = \mathbb{P}(Y \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $F_X = F_Y$ se e solo se $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

[Sugg.: si ricorda che $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, t]; t \in \mathbb{R}\}$ è un π -system che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

Esercizio 7. [Misure di conteggio] Su uno spazio misurabile (S, Σ) , sia μ definita come segue: per $A \in \Sigma$, $\mu(A) = \#A$ se A è finito e $\mu(A) = +\infty$ altrimenti. Provare che μ è una misura su (S, Σ) (detta *misura di conteggio*). Dimostrare poi che μ è finita se e solo se S è un insieme finito e che se Σ non è la σ -algebra banale, μ è σ -finita se e solo se S è numerabile.

[Oss: una misura di conteggio su (S, Σ) è ben definita anche se Σ non è $\mathcal{P}(S)$.]

Esercizio 8. [Restrizione di misure] Sia (S, Σ, μ) uno spazio di misura. Sia Σ_0 una σ -algebra su $S_0 \subset S$ tale che¹ $\Sigma_0 \subset \Sigma$ (e quindi $S_0 \in \Sigma$). Sia μ_0 definita tramite l'uguaglianza $\mu_0(A) = \mu(A)$, al variare di $A \in \Sigma_0$. Provare che (S_0, Σ_0, μ_0) è uno spazio di misura (e μ_0 è detta *la restrizione di μ a Σ_0*). Provare poi (con un controesempio) che se μ è σ -finita non è detto che anche μ_0 lo sia.

[Oss 1: il controesempio prova che la restrizione μ_0 di una misura μ dà luogo in generale ad una misura davvero diversa da μ .]

[Oss 2: preso $S_0 \in \Sigma$, sia $\Sigma_0 = \{A \cap S_0; A \in \Sigma\}$. Abbiamo visto (cfr. Esercitazione I) che Σ_0 è una σ -algebra e che $\Sigma_0 \subset \Sigma$. La restrizione di μ a Σ_0 è anche detta *restrizione di μ a S_0* .]

Esercizio 9. Per $n \in N$, $N \subset \mathbb{N}$, sia (S_n, Σ_n, μ_n) uno spazio di misura. Si supponga che $S_n \cap S_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$. Siano

$$S = \bigcup_n S_n, \quad \Sigma = \left\{ A \subset S \text{ t.c. } A \cap S_n \in \Sigma_n \text{ per ogni } n \in N \right\}$$

e per $A \in \Sigma$,

$$\mu(A) = \sum_n \mu_n(A \cap S_n).$$

Dimostrare che (S, Σ, μ) è uno spazio di misura. Supponendo che μ_n sia una misura finita per ogni n , μ è una misura finita? σ -finita? E se μ_n fosse σ -finita per ogni n , cosa si può dire per μ ?

¹Se Σ_0 è una σ -algebra su S allora Σ_0 è anche detta sotto σ -algebra di Σ . Ma qui non è richiesto che $S \in \Sigma_0$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Per $n = 2$ è vero. Supponiamo sia vero fino a n e verifichiamone la validità per $n + 1$:

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{k=1}^{n+1} A_k) &= \mu((\cup_{k=1}^n A_k) \cup A_{n+1}) \leq \mu(\cup_{k=1}^n A_k) + \mu(A_{n+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).\end{aligned}$$

b) Per $n = 2$ è vero. Supponiamo sia vero fino a n e verifichiamone la validità per $n + 1$:

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{k=1}^{n+1} A_k) &= \mu((\cup_{k=1}^n A_k) \cup A_{n+1}) \\ &= \mu(\cup_{k=1}^n A_k) + \mu(A_{n+1}) - \mu((\cup_{k=1}^n A_k) \cap A_{n+1}) \\ &= \mu(\cup_{k=1}^n A_k) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\cup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})) \\ &\quad \sum_{k:k \leq n} \mu(A_k) - \sum_{i,j:i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i,j,k:i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &+ \mu(A_{n+1}) - \left(\sum_{k:k \leq n} \mu(A_k \cap A_{n+1}) - \sum_{i,j:i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) \right) \\ &+ \sum_{i,j,k:i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}) - \dots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \left(\sum_{k:k \leq n} \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) \right) - \left(\sum_{i,j:i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{k:k \leq n} \mu(A_k \cap A_{n+1}) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i,j,k:i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{i,j:i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) \right) \\ &\quad - \dots - (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k:k \leq n+1} \mu(A_k) - \sum_{i,j:i < j \leq n+1} \mu(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i,j,k:i < j < k \leq n+1} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^n \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1})\end{aligned}$$

Esercizio 2. Poiché dev'essere $\mu(\{s\}) = \gamma(s)$ per ogni $s \in S$, allora $\{s\} \in \Sigma$ per ogni $s \in S$ quindi necessariamente Σ deve contenere $\sigma(\{\{s\}; s \in S\})$. Poiché S è discreto, è immediato verificare che $\sigma(\{\{s\}; s \in S\}) = \mathcal{P}(S)$ (= insieme delle parti), quindi $\Sigma = \mathcal{P}(S)$. Ora, preso $A \in \Sigma$ si ha $A = \cup_{s:s \in A} \{s\}$ e tale unione (disgiunta) è al più numerabile, quindi $\nu(A) = \sum_{s:s \in A} \nu(\{s\})$ per ogni misura ν su (S, Σ) . Allora, definiamo

$$\mu(A) = \sum_{s:s \in A} \gamma(s)$$

con la condizione $\mu(A) = 0$ se $A = \emptyset$. Verifichiamo che μ è σ -additiva: siano $A_1, A_2, \dots$ insiemi disgiunti di Σ . Allora, usando il fatto che gli A_n sono disgiunti e che γ è una funzione non negativa, si ha

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_{s: s \in \cup_n A_n} \gamma(s) = \sum_n \sum_{s: s \in A_n} \gamma(s) = \sum_n \mu(A_n)$$

il che prova che μ è una misura su (S, Σ) .

a) Dev'essere $\mu(S) < \infty$, quindi occorre che la serie $\sum_{s \in S} \gamma(s)$ converga. Se S è finito, μ è ovviamente una misura finita.

b) μ è sempre σ -finita. Infatti, supponendo $S = \{s_1, s_2, \dots\}$, si prenda, ad esempio $S_N = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$. Allora $\cup_N S_N = S$ e $\mu(S_N) = \sum_{k=1}^N \gamma(s_k) < \infty$ perché somma di un numero finito di quantità finite.

c) μ dev'essere finita e di massa 1: occorre che $\sum_{s \in S} \gamma(s) = 1$

Esercizio 3. **a)** Occorre far vedere che $\delta_{\{s\}}$ è σ -additiva. Siano $A_1, A_2, \dots$ elementi disgiunti di Σ . Si noti che $s \in \cup_n A_n$ se e solo se esiste un unico $\bar{n}$ tale che $s \in A_{\bar{n}}$. Dunque, se $\delta_{\{s\}}(\cup_n A_n) = 1$ allora $\sum_n \delta_{\{s\}}(A_n) = 1$ (perché i termini della somma sono tutti nulli tranne 1), se invece $\delta_{\{s\}}(\cup_n A_n) = 0$ allora $\sum_n \delta_{\{s\}}(A_n) = 0$ (perché i termini della somma sono tutti nulli), quindi $\delta_{\{s\}}(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_{\{s\}}(A_n)$.

b) Siano $A_1, A_2, \dots$ elementi disgiunti di Σ . Allora, usando **a)**,

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n A_n) &= \sum_k p_k \delta_{\{s_k\}}(\cup_n A_n) = \sum_k \sum_n p_k \delta_{\{s_k\}}(A_n) \\ &= \sum_n \sum_k p_k \delta_{\{s_k\}}(A_n) = \sum_n \mu(A_n), \end{aligned}$$

dove lo scambio tra sommatorie è possibile perché trattasi di serie a termini non negativi. Inoltre, perché μ sia di probabilità dev'essere $\mu(S) = 1$. Osservando che $\delta_{\{s\}}(S) = 1$ per ogni $s \in S$, μ è di probabilità se e solo se

$$\sum_k p_k = 1.$$

c) Presi $A_1, A_2, \dots$ in $\mathcal{E}$ a due a due disgiunti, si ha

$$\nu(\cup_n A_n) = \sum_{i: e_i \in \cup_n A_n} \gamma_i = \sum_n \sum_{i: e_i \in A_n} \gamma_i = \sum_n \nu(A_n).$$

Inoltre, per ogni A ,

$$\sum_{i: e_i \in A} \gamma_i = \sum_k \gamma_k \delta_{\{e_k\}}(A)$$

da cui si ottiene che la misura in (2) è del tipo (1).

Esercizio 4. a) Ovviamente $p_k \geq 0$ perché $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. Inoltre, essendo $X(\Omega) = E$,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in E) = \mathbb{P}(X \in \cup_k \{x_k\}) \\ &= \mathbb{P}(\cup_k \{X = x_k\}) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_k p_k. \end{aligned}$$

b) Per $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A \cap E) = \mathbb{P}(\cup_{k: x_k \in A} \{X = x_k\}) \\ &= \sum_{k: x_k \in A} p_k = \sum_k p_k \delta_{\{x_k\}}(A) \end{aligned}$$

(l'ultima disuguaglianza è stata discussa nel punto c) dell'Esercizio 3).

c) Segue dal punto b) con $A = (-\infty, x]$: per $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \sum_{k: x_k \in (-\infty, x]} p_k = \sum_{k: x_k \leq x} p_k.$$

Quindi, se immaginiamo i punti x_k ordinati, cioè $x_k < x_{k+1}$, allora

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \inf_k x_k \\ \sum_{k: x \leq x_k} p_k = \sum_{k: k \leq k_0} p_k & \text{se esiste } k_0 \text{ t.c. } x_{k_0} \leq x < x_{k_0+1} \\ \sum_k p_k = 1 & \text{se } x \geq \sup_k x_k \end{cases}$$

Quindi F_X è costante sugli intervalli della forma $[x_k, x_{k+1})$ e i salti si verificano negli estremi di questi intervalli. Inoltre, il salto tra un intervallo del tipo $[x_{k_0-1}, x_{k_0})$ e il successivo $[x_{k_0}, x_{k_0+1})$ è

$$\Delta F_X(x_{k_0}) = F_X(x_{k_0}) - F_X(x_{k_0}^-) = \sum_{k: k \leq k_0} p_k - \sum_{k: k \leq k_0-1} p_k = p_{k_0}.$$

Esercizio 5. Mostriamo che $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$, il che è ovvio, che $\mathbb{P}_X$ è σ -additiva e $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$. Siano $A_1, A_2, \dots$ elementi disgiunti di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(\cup_n A_n) &= \mathbb{P}(X \in \cup_n A_n) = \mathbb{P}(\cup_n \{X \in A_n\}) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(X \in A_n) = \sum_n \mathbb{P}_X(A_n) \end{aligned}$$

perché gli eventi $\{X \in A_n\}$ sono disgiunti se gli A_n lo sono, dunque $\mathbb{P}_X$ è σ -additiva. Inoltre

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1,$$

da cui segue che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio di probabilità.

Esercizio 6. Se $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ allora $F_X = F_Y$: basta prendere $A = (-\infty, t]$. Viceversa, si ha che $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ su $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, t]; t \in \mathbb{R}\}$. Ma $\pi(\mathbb{R})$ è un π -system che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: per il teorema di estensione, $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ su $\sigma(\pi(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da cui la tesi.

Esercizio 7. La prova è immediata. Vediamo il resto.

μ finita equivale a chiedere che $\#S < +\infty$. μ σ -finita equivale a chiedere l'esistenza di una successione di insiemi $S_n \in \Sigma$ tale che $S_n \uparrow S$ e $\mu(S_n) < \infty$, cioè $\#S_n < +\infty$, il che equivale a dire che S è numerabile.

Esercizio 8. La prova è immediata. Vediamo il controesempio richiesto.

Prendiamo S numerabile, $\Sigma = \mathcal{P}(S)$ e μ la misura di conteggio su (S, Σ) . μ è allora σ -finita. Sia ora Σ_0 la σ -algebra banale: $\Sigma_0 = \{\emptyset, S\}$. Evidentemente, μ_0 non è σ -finita.

Esercizio 9. Cominciamo con il mostrare che Σ è una σ -algebra su S . Poiché $\emptyset \cap S_n = \emptyset \in \Sigma_n$ e $S \cap S_n = S_n \in \Sigma_n$, segue che $\emptyset, S \in \Sigma$. Poi, preso $A \in \Sigma$, si ha $A^c \cap S_n = S_n \setminus (A \cap S_n) \in \Sigma_n$. Infine, se $A_1, \dots \in \Sigma$ allora $(\bigcup_k A_k) \cap S_n = \bigcup_k (A_k \cap S_n) \in \Sigma_n$. Dunque, Σ è effettivamente una σ -algebra.

Mostriamo ora che μ definisce una misura su (S, Σ) . Ovviamente, $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(A) \geq 0$ per ogni $A \in \Sigma$. Prendiamo ora $B_i \in \Sigma$ per $i = 1, 2, \dots$. Osserviamo che se $B_1, B_2, \dots$ sono a due a due disgiunti allora, per ogni n fissato, $B_1 \cap S_n, B_2 \cap S_n, \dots$ sono anch'essi a due a due disgiunti. Si ha quindi (la misura è un oggetto non negativo)

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_i B_i\right) &= \sum_n \mu_n\left(\left(\bigcup_i B_i\right) \cap S_n\right) = \sum_n \sum_i \mu_n(B_i \cap S_n) \\ &= \sum_i \sum_n \mu_n(B_i \cap S_n) = \sum_i \mu(B_i) \end{aligned}$$

da cui segue che effettivamente (S, Σ, μ) è uno spazio di misura.

Supponiamo ora che μ_n sia finita per ogni n . Questo non garantisce che μ sia finita. Infatti,

$$\mu(S) = \sum_n \mu_n(S_n)$$

è finita se e solo se la serie sopra scritta è convergente. Però μ è σ -finita. Infatti, posto $A_k = S_1 \cup \dots \cup S_k$, allora $A_k \in \Sigma$ per ogni k , $A_k \uparrow_k S$ ed inoltre

$$\mu(A_k) = \sum_n \mu_n(A_k \cap S_n) = \sum_{n=1}^k \mu_n(S_n) < \infty.$$

Supponiamo ora che μ_n sia σ -finita per ogni n : esiste $\{A_{n,k}\}_k \subset \Sigma_n$ tale che $A_{n,k} \uparrow_k S_n$ e $\mu_n(A_{n,k}) < \infty$ per ogni k . Definiamo allora

$$B_k = A_{1,k} \cup A_{2,k} \cup \dots \cup A_{k,k}.$$

Osserviamo che $B_k \cap S_n = A_{n,k}$ se $k \geq n$, altrimenti $B_k \cap S_n = \emptyset$. Quindi, $B_k \in \Sigma$ per ogni k ed inoltre

$$\mu(B_k) = \sum_{n=1}^k \mu_n(A_{n,k}) < \infty.$$

Se quindi verifichiamo che $B_k \uparrow_k S$, otteniamo che μ è σ -finita. Infatti, è immediato che $B_k \subset B_{k+1}$. Inoltre,

$$\bigcup_k B_k = \bigcup_k \bigcup_{n \leq k} A_{n,k} = \bigcup_n \bigcup_{k \geq n} A_{n,k} = \bigcup_n S_n = S.$$