Esercitazione I
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: algebre, σ-algebre.

Esercizio 1. **a)** Sia $\{\Sigma_\alpha\}_\alpha$ una famiglia di σ-algebre su S. Dimostrare che $\Sigma = \cap_\alpha \Sigma_\alpha$ è una σ-algebra su S.

b) Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ collezioni di sottoinsiemi di S e siano $\sigma(\mathscr{C})$, $\sigma(\mathscr{C}_1)$, $\sigma(\mathscr{C}_2)$ le rispettive σ-algebre generate[1]. Dimostrare che

b1) $\sigma(\mathscr{C}) = \displaystyle\bigcap_{\Sigma \in \mathscr{E}_{\mathscr{C}}} \Sigma$, dove $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}$ è l'insieme di tutte le σ-algebre che contengono $\mathscr{C}$;

b2) se in particolare $\mathscr{C}$ è una σ-algebra allora $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$;

b3) se $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$ allora $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$.

Esercizio 2. **a)** Sia $\mathscr{C} = \bigcup_{i\in I}\{C_i\}$ una partizione al più numerabile[2] di S. Dimostrare che

$$\Sigma := \left\{ A \subset S \,:\, A = \bigcup_{i \in I_A} C_i \text{ al variare di } I_A \subset I \right\}$$

(con la convenzione di porre $A = \emptyset$ quando $I_A = \emptyset$) è una σ-algebra e che $\Sigma = \sigma(\mathscr{C})$.

b) Siano $\mathscr{A}_1 = \{A\}$ e $\mathscr{A}_2 = \{A, B\}$, con $A, B \subset S$. Scrivere $\sigma(\mathscr{A}_1)$ e $\sigma(\mathscr{A}_2)$.

c) Provare con un (contro)esempio che l'unione di due σ-algebre **non è** in generale una σ-algebra.

Esercizio 3. **a)** Fissato S, sia Σ_0 la seguente classe di sottoinsiemi di S: $A \in \Sigma_0$ se e solo se A è finito oppure A^c è finito. Mostrare che:

a1) Σ_0 è un'algebra;

a2) se S è finito allora Σ_0 è una σ-algebra;

a3) se S non è finito allora Σ_0 non è in generale una σ-algebra.

b) Sia S un insieme non finito e Σ la seguente classe di sottoinsiemi di S: $A \in \Sigma$ se e solo se A è finito o numerabile oppure A^c è finito o numerabile.

[1] Si ricorda che $\sigma(\mathscr{C})$ è, per definizione, la più piccola σ-algebra contenente $\mathscr{C}$, cioè: se Σ è una σ-algebra e $\Sigma \supset \mathscr{C}$ allora $\Sigma \supset \sigma(\mathscr{C})$.

[2] Ovvero, I è un insieme di indici al più numerabile, $C_i \subset S$ per ogni i, $C_i \bigcap C_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ ed inoltre $\bigcup_{i\in I} C_i = S$.

b1) Mostrare che Σ è una σ-algebra.

b2) Preso $S = (0,1]$, provare che Σ è strettamente contenuta in $\mathscr{B}(0,1]$. Usare questo esempio per mostrare che l'unione più che numerabile di insiemi di una σ-algebra non è in generale un elemento della σ-algebra.

Esercizio 4. Sia (S, Σ) uno spazio misurabile e sia $S_0 \subset S$. Sia $\Sigma_0 = \{A \bigcap S_0\,,\, A \in \Sigma\}$.

a) Mostrare che Σ_0 è una σ-algebra su S_0.

b) Supponiamo $\Sigma = \sigma(\mathscr{C})$. Mostrare che $\Sigma_0 = \sigma(\mathscr{C}_0)$, essendo $\mathscr{C}_0 = \{A \bigcap S_0\,,\, A \in \mathscr{C}\}$.

[Sugg.: posto $\hat{\Sigma} = \{A \in \Sigma \,:\, A \bigcap S_0 \in \sigma(\mathscr{C}_0)\}$, mostrare che: 1) $\mathscr{C} \subset \hat{\Sigma} \subset \Sigma$ e 2) $\hat{\Sigma}$ è una σ-algebra su S. Dedurre quindi che $\Sigma_0 \subset \sigma(\mathscr{C}_0)$...]

Soluzioni

Esercizio 1. **a)** Si ha: $S \in \Sigma_\alpha$ per ogni α, quindi $S \in \Sigma$; se $A \in \Sigma$ allora $A \in \Sigma_\alpha$ per ogni α, quindi $A^c \in \Sigma_\alpha$ per ogni α e $A^c \in \Sigma$; se $\{A_n\}_n \subset \Sigma$ allora $\{A_n\}_n \subset \Sigma_\alpha$ per ogni α, quindi $\cup_n A_n \in \Sigma_\alpha$ per ogni α e $\cup_n A_n \in \Sigma$.

b1) Intanto, da **a)**, $\hat{\Sigma} := \cap_{\Sigma \in \mathscr{E}_\mathscr{C}} \Sigma$ è una σ-algebra. $\hat{\Sigma}$ contiene $\mathscr{C}$: se $C \in \mathscr{C}$ allora $C \in \Sigma$ per ogni $\Sigma \in \mathscr{E}_\mathscr{C}$, quindi $C \in \hat{\Sigma}$. Infine $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$ per ogni $\Sigma \in \mathscr{E}_\mathscr{C}$, quindi $\hat{\Sigma} = \sigma(\mathscr{C})$.

b2) Basta osservare che $\mathscr{C} \in \mathscr{E}_\mathscr{C}$ e usare **b1)**.

b3) Basta osservare che $\mathscr{E}_{\mathscr{C}_1} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{C}_2}$ e usare **b1)**.

Esercizio 2. **a)** Ovviamente $\emptyset, S \in \Sigma$ (si prenda $I_\emptyset = \emptyset$ e $I_S = I$). Preso $A \in \Sigma$

$$A^c = \Big(\bigcup_{i \in I_A} C_i\Big)^c = S \setminus \Big(\bigcup_{i \in I_A} C_i\Big) = \Big(\bigcup_{i \in I} C_i\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in I_A} C_i\Big) = \bigcup_{i \in I_A^c} C_i,$$

dunque $A^c \in \mathscr{F}$. Infine, se $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ allora, posto $A_n = \bigcup_{i \in I_{A_n}} C_i$,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n \Big(\bigcup_{i \in I_{A_n}} C_i\Big) = \bigcup_{i \in \cup_n I_{A_n}} C_i,$$

e ancora $\cup_n A_n \in \mathscr{F}$. Si noti che gran parte dei passaggi sopra scritti sono giustificati dal fatto che gli insiemi C_i sono a due a due disgiunti.

b) Siano

$$\mathscr{C}_1 = \{A, A^c\} \text{ e } \mathscr{C}_2 = \{A \cap B^c, A^c \cap B, A \cap B\, A^c \cap B^c\}.$$

$\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ sono entrambe partizioni (finite) di S tali che $\sigma(\mathscr{A}_1) = \sigma(\mathscr{C}_1)$ e $\sigma(\mathscr{A}_2) = \sigma(\mathscr{C}_2)$. Usando il punto precedente, si ottiene facilmente:

$$\begin{gathered}\sigma(\mathscr{C}_1) = \{\emptyset, S, A, A^c\} \\ \sigma(\mathscr{C}_2) = \{\emptyset, S, A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, A^c \cap B^c \\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A), A, B^c, B, A^c, (A \setminus B)^c \cap (B \setminus A)^c, \\ A \cup B, (A \cap B)^c, (A \setminus B)^c, (B \setminus A)^c\}\end{gathered}$$

c) Prendiamo $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, S, A, A^c\}$ e $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, S, B, B^c\}$, con $A, B \subset S$: se A, B possono essere scelti tali che $A \cup B \neq \emptyset, A, B, S$, allora $\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, S, A, A^c, B, B^c\}$ contiene, ad esempio, sia A che B ma non $A \cup B$, quindi non è una σ-algebra, né un'algebra.

Esercizio 3. **a1)** $S \in \Sigma_0$: se S è finito, niente da dire; se invece S non è finito, $S^c = \emptyset$ è finito. Σ_0 è chiusa sotto operazione di complementare: banale. Infine, siano $A, B \in \Sigma_0$. Occorre suddividere in casi:

• se A e B sono entrambi finiti allora $A \cup B$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$;

• se A^c e B^c sono entrambi finiti allora $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$;

• se A e B^c sono entrambi finiti allora: se B è finito anche $A \cup B$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$; se invece B non è finito allora $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$ è finito e ancora $A \cup B \in \Sigma_0$;

• se A^c e B sono entrambi finiti allora, procedendo in modo analogo a quanto visto sopra, segue facilmente che $A \cup B \in \Sigma_0$.

a2) Se S è finito, $\#\mathscr{P}(S) < \infty$ ($\mathscr{P}(S)$ = insieme delle parti di S) quindi presa una qualsiasi successione $\{A_n\}_n$ di sottoinsiemi di S allora esiste un indice n_0 tale che per ogni $n > n_0$, A_n coincide con $\emptyset$ oppure S oppure con un qualche A_k, con $k \leq n_0$. Ciò significa che se $\{A_n\}_n \subset \Sigma_0$ allora $\cup_n A_n = \cup_{k=1}^N B_k$ con $B_k \in \Sigma_0$ opportuni e da **a1)** segue che $\cup_n A_n \in \Sigma_0$.

a3) Se S non è finito, sia $\{s_k\}_k$ un insieme numerabile di S. Posto $A = \{s_1, s_3, \dots, s_{2k+1}, \dots\}$ allora $A^c \supset \{s_2, s_2, \dots, s_{2k}, \dots\}$, quindi $A \notin \Sigma_0$. Ma $A = \cup_{k \geq 0}\{s_{2k+1}\}$ e $\{s_{2k+1}\} \in \Sigma_0$ per ogni $k \geq 0$, quindi Σ_0 non è una σ-algebra.

b1) Occorre solo dimostrare che Σ è chiusa sotto unioni numerabili. Sia $\{A_n\}_n \subset \Sigma$. Se A_n finito o numerabile per ogni n allora $\cup_n A_n$ è finito o numerabile, quindi $\cup_n A_n \in \Sigma$. Altrimenti, cioè se esiste un ℓ tale che A_ℓ non è finito né numerabile, allora A_ℓ^c lo è e $(\cup_n A_n)^c = \cap_n A_n^c \subset A_\ell^c$ è finito o numerabile, e ancora $\cup_n A_n \in \Sigma$.

b2) Sia $A \in \Sigma$. Allora o A o A^c sono numerabili, cioè $A = \{a_k\}_k = \cup_k \{a_k\}$ oppure $A^c = \{a_k\}_k = \cup_k \{a_k\}$, con $a_k \in (0,1]$ per ogni k. Ora, $\{a_k\} \in \mathscr{B}(0,1]$:

$$\{a_k\} = \cap_n \Big(a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\Big)$$

da cui segue che o A oppure A^c appartiene a $\mathscr{B}(0,1]$, quindi $A \in \mathscr{B}(0,1]$. L'inclusione è stretta: basta considerare l'intervallo $(0,1/2]$, che è in $\mathscr{B}(0,1]$ ma non in Σ. Si noti che $(0,1/2] = \cup_{x\,:\,x\in(0,1/2]}\{x\} \notin \Sigma$ pur essendo $\{x\} \in \Sigma$ per ogni $x \in (0,1]$: l'unione più che numerabile di elementi di una σ-algebra non appartiene in generale alla σ-algebra.

Esercizio 4. a) $\emptyset, S_0 \in \Sigma_0$ perché $\emptyset = \emptyset \bigcap S_0$, $S_0 = S \bigcap S_0$. Sia ora $B \in \Sigma_0$: $B = A \bigcap S_0$ e

$$S_0 \setminus B = S_0 \bigcap A^c$$

con $A^c \in \Sigma$, quindi il complementare (fatto ovviamente in S_0) sta in Σ_0. Infine, se $B_1, B_2, \dots \in \Sigma_0$, con $B_i = A_i \bigcap S_0$ e $A_i \in \Sigma$, allora

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_i \Big(A_i \bigcap S_0\Big) = \Big(\bigcup_i A_i\Big) \bigcap S_0$$

con $\bigcup_i A_i \in \Sigma$, quindi $\bigcup_i B_i \in \Sigma_0$.

b) Ovviamente, $\sigma(\mathscr{C}_0) \subset \Sigma_0$. Per mostrare l'inclusione opposta, dev'essere che per ogni $A \in \Sigma$ allora $A \bigcap S_0 \in \sigma(\mathscr{C}_0)$. Quindi, posto (come suggerito)

$$\hat{\Sigma} = \{A \in \Sigma \,:\, A \bigcap S_0 \in \sigma(\mathscr{C}_0)\},$$

occorre dimostrare che $\hat{\Sigma} = \Sigma$. Si ha infatti:

1) $\mathscr{C} \subset \hat{\Sigma} \subset \Sigma$: verifica immediata;

2) $\hat{\Sigma}$ è una σ-algebra su S. Infatti, $\emptyset, S \in \hat{\Sigma}$ perché $\emptyset \bigcap S_0 = \emptyset, S \bigcap S_0 = S_0 \in \sigma(\mathscr{C}_0)$. Poi, (ricordiamo che $\sigma(\mathscr{C}_0)$ è una σ-algebra su S_0) se $A \in \hat{\Sigma}$ allora $A^c \bigcap S_0 = S_0 \setminus (A \bigcup S_0) \in \sigma(\mathscr{C}_0)$. Infine, se $A_1, A_2, \ldots \in \hat{\Sigma}$ allora $(\bigcup_i A_i) \bigcap S_0 = \bigcup_i (A_i \bigcap S_0) \in \sigma(\mathscr{C}_0)$.

Da 1) e 2) segue allora che $\Sigma = \sigma(\mathscr{C}) \subset \hat{\Sigma} \subset \Sigma$, da cui $\hat{\Sigma} = \Sigma$ e quindi la tesi.