ESERCITAZIONE XIII
 COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ
 A.A. 2011/2012

Argomenti: comportamento asintotico di martingale.

Esercizio 1. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. e q.c. non negative, con $\mathbb{E}(X_1) = 1$. Definiamo

$$M_0 = 1 \text{ e per } n \geq 1, M_n = \prod_{k=1}^n X_k.$$

Poniamo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

- a) Verificare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala limitata in L^1 . Dimostrare quindi che la v.a.

$$\prod_{k=1}^{\infty} X_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n X_k$$

è ben posta ed è integrabile.

- b) Verificare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala di quadrato integrabile se e solo se $X_1 \in L^2$ e tuttavia, $\{M_n\}_n$ non è mai limitata in L^2 .

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. gaussiane standard. Definiamo $S_0 = 0$ e per $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Per $\lambda \neq 0$ fissato, definiamo

$$M_n = e^{\lambda S_n + n\theta}, \quad n \geq 0.$$

al variare di $\theta \in \mathbb{R}$. Poniamo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

- a) Verificare che $\{M_n\}_n$ è un processo $\mathcal{F}_n$ -adattato, integrabile¹ e che
- a1) se $\theta = -\lambda^2/2$ allora $\{M_n\}$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala;
 - a2) se $\theta < -\lambda^2/2$ allora $\{M_n\}$ è una $\mathcal{F}_n$ -supermartingala;
 - a3) se $\theta > -\lambda^2/2$ allora $\{M_n\}$ è una $\mathcal{F}_n$ -submartingala.
- b) Mostrare che per $\theta \leq -\lambda^2/2$ esiste M_∞ tale che $M_n \rightarrow M_\infty$ q.c. quando $n \rightarrow \infty$. Provare che $M_\infty = 0$ q.c. e che $M_n \rightarrow M_\infty$ anche in L^1 se e solo se $\theta < -\lambda^2/2$.
- c) Dimostrare che $M_n \rightarrow M_\infty$ anche in L^2 quando $\theta < -\lambda^2$.
- d) Mostrare che se $\theta \neq 0$ esiste una v.a. estesa (cioè a valori in $\bar{\mathbb{R}}$) M_∞ tale che $M_n \rightarrow M_\infty$ q.c. quando $n \rightarrow \infty$.

¹Potrebbe essere utile ricordare che se $Z \sim N(0,1)$ allora $e^{\lambda Z} \in L^1$ per ogni λ e $\mathbb{E}(e^{\lambda Z}) = e^{\lambda^2/2}$.

[Sugg.: si ricorda la legge (forte) dei grandi numeri...]

Esercizio 3. Sia $M = \{M_n\}_n$ una martingala limitata in L^2 e sia

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1}).$$

Dimostrare che $X = \{X_n\}_n$ è una martingala che converge q.c. e in L^2 . Dedurre che la serie $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1})$ è q.c. convergente.

Esercizio 4. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia $\{Y_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $\mathbb{P}(Y_k = +1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(Y_k = 0) = 1/2$. Per $n = 0, 1, \dots$, siano $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ e $X_n = \prod_{k=0}^n (Y_k + 1)$. Definiamo infine $\tau = \inf\{k \geq 0 : Y_k = -1\}$.

- Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala.
- Provare che τ è un $\mathcal{F}_n$ -tempo d'arresto q.c. finito e che $X_\tau = 0$ q.c.
- Calcolare $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n})$ per ogni n .
- Dire se, per $n \rightarrow \infty$, $\{X_{\tau \wedge n}\}_n$ converge q.c. e/o in L^1 e/o in L^2 .

Esercizio 5. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia data una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_n$. Sia $\mathbb{Q}$ una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Per ogni n fissato, siano $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{Q}_n$ la restrizione rispettivamente di $\mathbb{P}$ e di $\mathbb{Q}$ a $\mathcal{F}_n$ ($\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n : \mathcal{F}_n \rightarrow [0, 1]$, $\mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{Q}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}_n$).

- Dimostrare che, per ogni n , $\mathbb{Q}_n \ll \mathbb{P}_n$
- Posto $X_n = \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n}$ e $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, dimostrare che $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ e che $\{X_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala che converge q.c. per $n \rightarrow \infty$.

[Sugg.: Osservare che $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n) \equiv (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ e $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{Q}_n) \equiv (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{Q})$ ed inoltre, su $\mathcal{F}_n$ si ha $\mathbb{P}_n \equiv \mathbb{P}_{n+1}$ e $\mathbb{Q}_n \equiv \mathbb{Q}_{n+1}$.]

Esercizio 6. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia data una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_n$ e sia $\{M_n\}_n$ una $\mathcal{F}_n$ -martingala limitata in L^4 (cioè, esiste una costante positiva L tale che $\sup_n \mathbb{E}(|M_n|^4) \leq L$). Definiamo $X_0 = 0$ e per $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_{k-1}(M_k - M_{k-1})}{k}.$$

- Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala. È anche di quadrato integrabile?
- Dire se, per $n \rightarrow \infty$, $\{X_n\}_n$ converge q.c. e/o in L^1 .

Esercizio 7. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. a valori in $[0, 1]$, con $X_0 = a \in [0, 1]$, e sia $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Supponiamo che

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{e} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana t.c. $f(X_{n+1}, X_n) \in L^1$. Verificare che si ha

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}, X_n) \mid \mathcal{F}_n) = f\left(\frac{X_n}{2}, X_n\right)(1 - X_n) + f\left(\frac{1+X_n}{2}, X_n\right)X_n.$$

[Sugg.: da $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1$ e dal fatto che $\{X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\} \cap \{X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\} = \emptyset$ si ottiene $\mathbf{1}_{\{X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\}} + \mathbf{1}_{\{X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\}} = 1$ e quindi...]

b) Mostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala che converge q.c. e in L^2 ad una v.a. Z .

c) Mostrare che $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$.

d) Calcolare $\mathbb{E}(Z(1 - Z))$. Qual è la legge di Z ?

Esercizio 8. Sia $\{Z_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $P(Z_n = 1) = 1/2 = 1 - P(Z_n = -1)$. Fissato un intero $a > 0$, sia $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n = a\}$, dove $S_0 = 0$ per $n \geq 1$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$. Definiamo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Per $\theta \in \mathbb{R}$, sia²

$$X_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}, \quad n \geq 0.$$

a) Dimostrare che τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. e che $\{X_n^\theta\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala.

b) Supponiamo $\theta \geq 0$. Dimostrare che $\{X_{n \wedge \tau}^\theta\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala limitata. Dedurre che

b1) se $\theta > 0$, $\{X_{n \wedge \tau}^\theta\}_n$ converge q.c. e in L^2 per $n \rightarrow \infty$ a

$$W^\theta = \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}};$$

b2) $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ e per ogni $\theta \geq 0$ si ha $\mathbb{E}((\cosh \theta)^{-\tau}) = e^{-\theta a}$.

[Sugg.: studiare la convergenza di W^θ per $\theta \downarrow 0$...]

Esercizio 9. Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. integrabili. Poniamo: $\mathbb{E}(Y_1) = \mu$, $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Sia τ un $\mathcal{F}_n$ -t.a. integrabile (quindi, $\tau < +\infty$ q.c.).

²Ricordiamo che $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$, $\theta \in \mathbb{R}$. In particolare, $\cosh$ è una funzione ≥ 1 , convessa e simmetrica rispetto all'origine.

- a) Sia $X_n = S_n - n\mu$.
- a1) Verificare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala.
 - a2) Dimostrare che, per ogni n , $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau}) = \mu \mathbb{E}(n \wedge \tau)$.
 - a3) Dimostrare che S_τ è integrabile e $\mathbb{E}(S_\tau) = \mu \mathbb{E}(\tau)$.
[Sugg.: supporre dapprima che $\mu = 0$ e poi rimuovere tale ipotesi.]
 - a4) Supponiamo che $\mathbb{P}(Y_n = +1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$ e che $\tau = \inf\{n : S_n \geq a\}$, dove a è un intero positivo. Nell'esercizio 8 si è visto che $\tau < +\infty$ q.c. Dimostrare ora che τ non è integrabile.
- b) Supponiamo d'ora in poi che $\mathbb{E}(Y_1^2) < \infty$ e poniamo $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$. Supponiamo anche $\mu = 0$ e poniamo $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$.
- b1) Verificare che $\{Z_n\}_n$ è una martingala e che $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau}^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(n \wedge \tau)$.
 - b2) Dimostrare che per ogni $\mathcal{F}_n$ -tempo d'arresto ν finito q.c. si ha
 - b21) $\sum_{k=1}^{\nu} Y_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}$;
 - b22) $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}} \in L^1$ e quindi $\sum_k \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}) < +\infty$;
 - b23) se $j < k$, $\mathbb{E}(Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}} Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}) = 0$.
[Sugg.: (i) si usi il punto a); (ii) si ha $\{\ell \leq \tau\} = \{\tau \leq \ell - 1\}^c \in \mathcal{F}_{\ell-1}$.]
 - b3) Dimostrare che $\{S_{n \wedge \tau}\}_n$ è di Cauchy in L^2 . Dedurre che $S_{n \wedge \tau} \rightarrow S_\tau$ in L^2 per $n \rightarrow \infty$.
[Sugg.: poiché $\mathbf{1}_{\{k \leq n \wedge \tau\}} = \mathbf{1}_{\{k \leq n\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}}$, si ha $S_{n \wedge \tau} = \sum_{k \leq n} Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}} \dots$]
 - b4) Dimostrare che $\mathbb{E}(S_\tau^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\tau)$.
 - b5) Rimuoviamo ora l'ipotesi $\mu = 0$ e supponiamo quindi $\mu \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\mathbb{E}((S_\tau - \mu\tau)^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\tau)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) M_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile ed integrabile. Inoltre, si vede subito che è una martingala. Infine,

$$\sup_n \mathbb{E}(|M_n|) = \sup_n \mathbb{E}(M_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 1$$

dunque è limitata in L^1 . Il teorema di convergenza di Doob garantisce l'esistenza di una v.a. $M_\infty \in L^1$ tale che $M_n \rightarrow M_\infty$ q.c. Basta allora definire

$$\prod_{k \geq 1} X_k = M_\infty = \text{q.c.-} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n X_k.$$

b) Se $M_n \in L^2$ per ogni n allora $X_1 \in L^2$. Viceversa,

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k^2\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) = \prod_{k=1}^n (\text{Var}(X_k) + \mathbb{E}^2(X_k)) = (\sigma^2 + 1)^n$$

Peraltro, da qui segue che $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) = +\infty$, quindi non può mai essere limitata in L^2 .

Esercizio 2. a) S_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile, quindi M è un processo adattato. Inoltre

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\lambda X_k}\right) e^{n\theta} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{\lambda X_k}) e^{n\theta} = e^{n\frac{\lambda^2}{2} + n\theta} < \infty.$$

Poi,

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_n \underbrace{e^{\lambda X_{n+1} + \theta}}_{\text{indip. da } \mathcal{F}_n} | \mathcal{F}_n) = M_n \mathbb{E}(e^{\lambda X_{n+1}}) e^\theta = M_n e^{\frac{\lambda^2}{2} + \theta}$$

Quindi:

a1) se $\theta = -\frac{\lambda^2}{2}$, M è una martingala;

a2) se $\theta < -\frac{\lambda^2}{2}$, M è una supermartingala;

a3) se $\theta > -\frac{\lambda^2}{2}$, M è una submartingala.

b) Abbiamo visto che $\|M_n\|_{L^1} = e^{n(\lambda^2/2 + \theta)}$, quindi M è limitata in L^1 se e solo se $\theta \leq -\lambda^2/2$. In tal caso, per il teorema di convergenza di Doob, esiste una v.a. $M_\infty \in L^1$ tale che $M_n \rightarrow M_\infty$ q.c. Ora,

$$M_n = e^{n\left(\lambda \frac{1}{n} S_n + \theta\right)}$$

e per la LFGN, $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}(X_1) = 0$ q.c. per $n \rightarrow \infty$. Ma allora, essendo $\theta < 0$,

$$M_n \rightarrow 0 \equiv M_\infty \text{ q.c.}$$

Infine,

$$\|M_n - M_\infty\|_{L^1} = \|M_n\|_{L^1} = e^{n(\lambda^2/2+\theta)} \rightarrow 0 \text{ sse } \theta < \frac{\lambda^2}{2}.$$

c) Si ha

$$\|M_n - M_\infty\|_{L^2} = \|M_n\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(e^{2\lambda S_n + 2n\theta}) = e^{2n\lambda^2 + 2n\theta}$$

da cui segue che $M_n \rightarrow M_\infty$ in L^2 se e solo se $\theta < -\lambda^2$.

d) Dalla LFGN, se $\theta \neq 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(\lambda \frac{1}{n} S_n + \theta)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta < 0 \\ +\infty & \text{se } \theta > 0 \end{cases} \text{ q.c.}$$

Esercizio 3. Si vede facilmente che, per ogni n , X_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile e integrabile (somma di v.a. tutte $\mathcal{F}_n$ -misurabili ed integrabili). Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\underbrace{X_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mis.}} + \frac{1}{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= X_n + \frac{1}{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n)}_{= 0 [M \text{ è } \mathcal{F}_n\text{-mg}]} = X_n \end{aligned}$$

Studiamo $\|X_n\|_{L^2}$:

$$\begin{aligned} \|X_n\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1}) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2} (\|M_k\|_{L^2}^2 + \|M_{k-1}\|_{L^2}^2) \leq K \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

perché M è limitata in L^2 . Essendo $\sum_k 1/k^2 < \infty$, si ha che X è limitata in L^2 , e quindi ammette limite q.c. e in L^2 . Allora, la serie $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1})$ non è altro che il limite q.c. e in L^2 della martingala X_n .

Esercizio 4. a) Per ogni n , X_n è integrabile (perché prodotto di v.a. indipendenti ed integrabili) e $\mathcal{F}_n$ -misurabile (perché prodotto di v.a. $\mathcal{F}_n$ -misurabili). Poi,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\underbrace{X_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mis.}} \cdot \underbrace{(Y_{n+1} + 1)}_{\text{indip. da } \mathcal{F}_n} \mid \mathcal{F}_n \right) = X_n \underbrace{\mathbb{E}(Y_{n+1} + 1)}_{= 1} = X_n$$

quindi $\{X_n\}_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala.

b) Fissato n ,

$$\begin{aligned} \{\tau = n\} &= \{Y_0 \neq -1, \dots, Y_{n-1} \neq -1, Y_n = -1\} \\ &= \underbrace{\{Y_0 \neq -1\}}_{\in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n} \cap \dots \cap \underbrace{\{Y_{n-1} \neq -1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{Y_n = -1\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

e quindi τ è un $\mathcal{F}_n$ -tempo d'arresto. Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > N) &= \mathbb{P}(Y_0 \neq -1, \dots, Y_{N-1} \neq -1, Y_N \neq -1) \\ &= \left(\mathbb{P}(Y_0 \neq -1)\right)^{N+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

dunque è q.c. finito. Ora, q.c. (perché quanto stiamo per scrivere vale sull'evento $\{\tau < \infty\}$) si ha

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_\tau \mathbf{1}_{\tau=n} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{\tau=n}$$

Ma, su $\{\tau = n\}$, si ha $Y_n = -1$ e quindi $X_n = X_{n-1}(Y_n + 1) = 0$, da cui segue che $X_\tau = 0$ q.c.

c) $\tau \wedge n$ è un tempo d'arresto limitato e X è una martingala: per il teorema d'arresto di Doob,

$$\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(Y_0) = 1.$$

d) Poiché τ è q.c. finito, quando $n \rightarrow \infty$ si ha $\tau \wedge n \rightarrow \tau$ q.c. e quindi $X_{\tau \wedge n} \rightarrow X_\tau = 0$ q.c. Ma la convergenza non avviene in L^1 : se così fosse, si avrebbe $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) \rightarrow \mathbb{E}(X_\tau) = 0$, il che è falso perché $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) = 1$ per ogni n . Dunque, non converge neanche in L^2 .

Esercizio 5. a) Sia $A \in \mathcal{F}_n$ tale che $\mathbb{P}_n(A) = 0$. Allora $A \in \mathcal{F}$ e $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_n(A) = 0$, quindi $\mathbb{Q}(A) = 0$. Essendo $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}_n(A)$, segue la tesi.

b) Indicheremo con $\mathbb{E}, \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}$ l'aspettazione rispettivamente sotto $\mathbb{P}, \mathbb{P}_n, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_n$.

Fissato n e $A \in \mathcal{F}_n$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}(X_n \mathbf{1}_A) \quad [(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}) \equiv (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n) \text{ e } X_n \mathbf{1}_A \text{ è } \mathcal{F}_n\text{-mis. e int.}] \\ &= \mathbb{Q}_n(A) \quad [X_n = \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n} \text{ e } A \in \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{Q}(A) \quad [(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{Q}) \equiv (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{Q}_n) \text{ e } A \in \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) \quad [X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] \end{aligned}$$

da cui segue che $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$. Inoltre, un processo di questo tipo è sempre una martingala: poiché $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, per la proprietà "della torre", si ha

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = X_n$$

Infine, $X_n \geq 0$ perché è una densità. Quindi

$$\|X_n\|_{L^1(\mathbb{P})} = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^n}(X_n) = \mathbb{Q}_n(\Omega) = 1$$

cioè $\{X_n\}_n$ è limitata in L^1 . Il teorema di convergenza di Doob garantisce l'esistenza di una v.a. Z integrabile (sotto $\mathbb{P}$) e $\mathcal{F}_\infty$ -misurabile tale che $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) \rightarrow Z$ q.c.

Esercizio 6. a) X_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile (perché somma di v.a. $\mathcal{F}_n$ -misurabili) ed integrabile, perché $M_{k-1}, M_k - M_{k-1} \in L^2$ e quindi $M_{k-1}(M_k - M_{k-1}) \in L^1$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz), per ogni k . Inoltre,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(X_n + \frac{M_n(M_{n+1} - M_n)}{n} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

Ma X_n e M_n sono $\mathcal{F}_n$ -misurabili, quindi

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n + \frac{M_n}{n} \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n)}_{= 0: M \text{ è } \mathcal{F}_n\text{-mg}} = X_n.$$

Infine, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|M_{k-1}(M_k - M_{k-1})|^2) &= \mathbb{E}(|M_{k-1}|^2 |M_k - M_{k-1}|^2) \\ &\leq \left(\mathbb{E}(|M_{k-1}|^4)\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}(|M_k - M_{k-1}|^4)\right)^{1/2} \leq \text{const} \cdot L \end{aligned}$$

da cui segue che $X_n \in L^2$.

b) Si noti che

$$\mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2) = \mathbb{E}\left(\left|\frac{M_{n-1}(M_n - M_{n-1})}{n}\right|^2\right) \leq \text{const} \cdot \frac{1}{n^2}$$

quindi $\sum_n \mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2) < \infty$, cioè X è limitata in L^2 . Ma allora, X_n converge q.c. e in L^2 , dunque anche in L^1 , alla v.a. che si può identificare con $\sum_{k \geq 1} \frac{M_{k-1}(M_k - M_{k-1})}{k}$.

Esercizio 7. a) Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(1 - (\mathbf{1}_{\{X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\}} + \mathbf{1}_{\{X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2}\}}) \mid \mathcal{F}_n\right). \end{aligned}$$

Passando alle medie, si ottiene

$$\mathbb{E}\left(1 - (\mathbf{1}_{\{X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\}} + \mathbf{1}_{\{X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2}\}})\right) = 0.$$

Ma

$$\begin{aligned} & \left\{ X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \right\} \cap \left\{ X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \right\} \\ &= \left\{ X_{n+1} = \frac{X_n}{2} = \frac{1+X_n}{2} \right\} \subset \{X_n = 1 + X_n\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Quindi $1 - (\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\}} + \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{1+X_n}{2}\}}) \geq 0$ e tale v.a. ha media nulla. Ma allora dev'essere

$$\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\}} + \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{1+X_n}{2}\}} = 1 \quad \text{q.c.}$$

Allora, presa $f(X_{n+1}, X_n) \in L^1$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{n+1}, X_n) | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(f(X_{n+1}, X_n)(\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\}} + \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{1+X_n}{2}\}}) | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(f(X_{n+1}, X_n)\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\}} | \mathcal{F}_n) + \\ &\quad + \mathbb{E}(f(X_{n+1}, X_n)\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{1+X_n}{2}\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}\left(\underbrace{f\left(\frac{X_n}{2}, X_n\right)}_{\mathcal{F}_n\text{-mis.}} \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\}} \middle| \mathcal{F}_n\right) + \\ &\quad + \mathbb{E}\left(\underbrace{f\left(\frac{1+X_n}{2}, X_n\right)}_{\mathcal{F}_n\text{-mis.}} \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{1+X_n}{2}\}} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= f\left(\frac{X_n}{2}, X_n\right)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\}} | \mathcal{F}_n) \\ &\quad + f\left(\frac{1+X_n}{2}, X_n\right)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=\frac{1+X_n}{2}\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= f\left(\frac{X_n}{2}, X_n\right)\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \middle| \mathcal{F}_n\right) + \\ &\quad + f\left(\frac{1+X_n}{2}, X_n\right)\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \middle| \mathcal{F}_n\right). \end{aligned}$$

b) Presa $f(x, y) = x$, da **a)** si ottiene

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{X_n}{2}(1 - X_n) + \frac{1+X_n}{2}X_n = X_n$$

quindi X_n è mg. Poi, essendo $X_n \in [0, 1]$ q.c., $\{X_n\}_n$ è limitata in L^p per ogni p . In particolare, converge in L^2 e q.c. ad un'opportuna v.a. Z , che senz'altro assumerà valori in $[0, 1]$ q.c.

c) Presa $f(x, y) = (x - y)^2$, da **a)** si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2 | \mathcal{F}_n) &= \left(\frac{X_n}{2} - X_n\right)^2(1 - X_n) + \left(\frac{1+X_n}{2} - X_n\right)^2 X_n \\ &= \frac{1}{4}X_n^2(1 - X_n) + \frac{1}{4}(1 - X_n)^2 X_n \\ &= \frac{1}{4}X_n(1 - X_n) \end{aligned}$$

e passando alle medie si ottiene subito $4\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$.

d) Poiché $X_n \rightarrow Z$ in L^2 , si ha anche $X_n \rightarrow Z$ in L^1 e quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z(1 - Z)) &= \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n^2)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n(1 - X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2).\end{aligned}$$

Poiché $\{X_n\}_n$ converge in L^2 , è di Cauchy in L^2 e quindi $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) \rightarrow 0$, da cui

$$\mathbb{E}(Z(1 - Z)) = 0.$$

Essendo però $Z(1 - Z) \geq 0$ q.c. si ha $Z(1 - Z) = 0$ q.c. e quindi Z assume è a valori in $\{0, 1\}$, cioè $Z \sim \text{Be}(p)$. Calcoliamo $p = \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{E}(Z)$. Poiché $X_n \rightarrow Z$ in L^1 ,

$$p = \mathbb{E}(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = a$$

perché X_n è mg. Dunque, $p = a$.

Esercizio 8. a) Da

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{S_1 < a, \dots, S_{n-1} < a, S_n = a\} \\ &= \left(\bigcap_{k < n} \underbrace{\{S_k < a\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \right) \cap \underbrace{\{S_n = a\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

segue che τ è t.a. Inoltre, S_n assume un numero finito di valori, dunque $e^{\theta S_n}$ è $\mathcal{F}_n$ -misurabile ed integrabile. Poi,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\theta | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\underbrace{X_n^\theta}_{\mathcal{F}_n\text{-mis.}} \cdot \underbrace{\frac{e^{\theta X_{n+1}}}{\cosh \theta}}_{\text{indip. da } \mathcal{F}_n} \mid \mathcal{F}_n \right) = X_n^\theta \frac{1}{\cosh \theta} \mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}})$$

Ma

$$\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}}) = e^\theta \frac{1}{2} + e^{-\theta} \frac{1}{2} = \cosh \theta$$

da cui segue che $\{X_n^\theta\}_n$ è martingala.

b) Supponiamo $\theta \geq 0$. Poiché $S_{n \wedge \tau} \leq a$, $\cosh \theta \geq 1$ e $\tau \geq 1$, otteniamo

$$0 \leq X_{n \wedge \tau}^\theta = \frac{e^{\theta S_{n \wedge \tau}}}{(\cosh \theta)^{n \wedge \tau}} \leq e^{\theta a}.$$

Ricordando poi le proprietà delle martingale arrestate, si ottiene la tesi.

b1) Poiché $\{X_{n \wedge \tau}^\theta\}_n$ è una martingala limitata in L^2 , essa converge q.c. ed in L^2 . Ora,

$$X_{n \wedge \tau}^\theta = X_{n \wedge \tau}^\theta \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}} + X_{n \wedge \tau}^\theta \mathbf{1}_{\{\tau = +\infty\}}.$$

Ma, su $\{\tau < +\infty\}$, si ha $n \wedge \tau \uparrow \tau$ per $n \rightarrow \infty$, quindi

$$X_{n \wedge \tau}^\theta \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}} \rightarrow X_\tau^\theta \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}} = \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}}.$$

Invece, su $\{\tau = +\infty\}$ si ha $n \wedge \tau = n$ e $S_n < a$, quindi per $n \rightarrow \infty$,

$$0 \leq X_{n \wedge \tau}^\theta \mathbf{1}_{\{\tau = +\infty\}} = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n} \mathbf{1}_{\{\tau = +\infty\}} \leq \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^n} \mathbf{1}_{\{\tau = +\infty\}} \rightarrow 0.$$

Ma allora, per $n \rightarrow \infty$,

$$X_{n \wedge \tau}^\theta = X_{n \wedge \tau}^\theta \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}} + X_{n \wedge \tau}^\theta \mathbf{1}_{\{\tau = +\infty\}} \rightarrow W^\theta.$$

b2) Osserviamo che, se $\theta \downarrow 0$, $W^\theta \rightarrow \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}}$ q.c. Inoltre,

$$0 \leq W^\theta \leq e^{\theta a} \leq e^a$$

per ogni $\theta < 1$. Usando DOM, otteniamo così

$$\mathbb{E}(W^\theta) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}}) = \mathbb{P}(\tau < +\infty).$$

Ma, W^θ è il limite in L^2 di $X_{n \wedge \tau}^\theta$, quindi $\mathbb{E}(W^\theta) = \lim_n \mathbb{E}(X_{n \wedge \tau}^\theta)$. Dal teorema d'arresto, $\mathbb{E}(X_{n \wedge \tau}^\theta) = \mathbb{E}(X_0^\theta) = 1$, da cui segue immediatamente che $\mathbb{E}(W^\theta) = 1$ e quindi $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.

Esercizio 9. a1) X_n è ovviamente $\mathcal{F}_n$ -misurabile ed integrabile. Inoltre

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + Y_{n+1} - \mu | \mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mu = X_n$$

perché Y_{n+1} è indipendente da $\mathcal{F}_n$.

a2) $\{X_n\}_n$ è una martingala: dal teorema d'arresto, $\mathbb{E}(X_{n \wedge \tau}) = \mathbb{E}(X_0) = 0$, da cui segue immediatamente che $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau}) = \mathbb{E}(\mu n \wedge \tau) = \mu \mathbb{E}(n \wedge \tau)$.

a3) Osserviamo che si ha sempre $n \wedge \tau \uparrow \tau$ per $n \rightarrow \infty$ e quindi, da MON, $\mathbb{E}(n \wedge \tau) \uparrow \mathbb{E}(\tau)$.

Assumiamo dapprima $Y_n \geq 0$ q.c. In tal caso, $S_{n \wedge \tau} \uparrow S_\tau$. Usando **a2)** e MON

$$\mathbb{E}(S_\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_{n \wedge \tau}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \mathbb{E}(n \wedge \tau) = \mu \mathbb{E}(\tau).$$

Assumiamo ora Y_n qualsiasi. Poniamo $\tilde{S}_n^\pm = \sum_{k=1}^n Y_k^\pm$, dove Y_n^+ e Y_n^- denotano rispettivamente la parte positiva e negativa di Y_n , e $\tilde{\mu}^\pm = \mathbb{E}(Y_n^\pm)$. Usando quanto appena dimostrato, otteniamo $\mathbb{E}(\tilde{S}_\tau^\pm) = \tilde{\mu}^\pm \mathbb{E}(\tau)$. La tesi ora segue osservando che $S_\tau = \tilde{S}_\tau^+ - \tilde{S}_\tau^-$ e che $\mu = \tilde{\mu}^+ - \tilde{\mu}^-$.

a4) Se τ fosse integrabile, quanto appena visto sarebbe valido e quindi

$$\mathbb{E}(S_\tau) = \mu \mathbb{E}(\tau) = 0.$$

Ma $S_\tau = a > 0$, dunque si avrebbe $a = 0$, il che è assurdo.

b1) S_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile e $S_n \in L^2$ perché somma di v.a. di L^2 , dunque $\{Z_n\}_n$ è $\mathcal{F}_n$ -adattato ed integrabile. Inoltre,

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((S_n + Y_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n) - (n+1)\sigma^2$$

Ricordando che Y_{n+1} è indipendente da $\mathcal{F}_n$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((S_n + Y_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((x + Y_{n+1})^2) \Big|_{x=S_n} \\ &= \mathbb{E}(x^2 + Y_{n+1}^2 - 2xY_{n+1}) \Big|_{x=S_n} \\ &= x^2 + \sigma^2 \Big|_{x=S_n} = S_n^2 + \sigma^2. \end{aligned}$$

Sostituendo sopra, troviamo la proprietà di martingala richiesta. Ora, usando il teorema d'arresto, $\mathbb{E}(Z_{n \wedge \tau}) = \mathbb{E}(Z_0) = 0$, il che dà l'uguaglianza richiesta.

b21) Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \nu} Y_k^2 &= \sum_n \left(\sum_{k \leq \nu} Y_k^2 \right) \mathbf{1}_{\{\nu=n\}} = \sum_n \sum_{k \leq n} Y_k^2 \mathbf{1}_{\{\nu=n\}} \\ &= \sum_k \sum_{n \geq k} Y_k^2 \mathbf{1}_{\{\nu=n\}} = \sum_k Y_k^2 \sum_{n \geq k} \mathbf{1}_{\{\nu=n\}} \\ &= \sum_k Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}} \end{aligned}$$

b22) Essendo $\hat{S}_n = \sum_{k \leq n} Y_k^2$ un processo del tipo studiato in **a)**, con le sostituzioni $Y_n \rightsquigarrow Y_n^2$, $\mu \rightsquigarrow \sigma^2$ e $\tau \rightsquigarrow \nu$, abbiamo visto che $\sum_{k \leq \nu} Y_k^2 = \hat{S}_\nu \in L^1$. Dunque, in particolare si ha che

$$\mathbb{E}\left(\sum_k Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}\right) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu).$$

Inoltre, $0 \leq \sum_{k \leq n} Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}} \uparrow \sum_k Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}$ quando $n \rightarrow \infty$ e quindi da MON

$$\sum_k \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu) = \mathbb{E}\left(\sum_k Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}\right) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu) < +\infty$$

b23) Poiché $j < k$, $j \leq k-1$ e quindi $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-1}$. Inoltre, $\{k \leq \nu\} = \{\nu \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}} Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}) &= \mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}(Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}})}_{\mathcal{F}_{k-1}\text{-mis.}} \underbrace{Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}}}_{\mathcal{F}_{k-1}\text{-mis.}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}} \underbrace{\mathbb{E}(Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\text{ind. da } \mathcal{F}_{k-1}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}} \underbrace{\mathbb{E}(Y_k)}_{=0}\right) = 0 \end{aligned}$$

b3) Si ha

$$S_{n \wedge \tau} = \sum_{k \leq n \wedge \tau} Y_k = \sum_k Y_k \underbrace{\mathbf{1}_{\{k \leq n \wedge \tau\}}}_{=\mathbf{1}_{\{k \leq n\} \cap \{k \leq \tau\}}} = \sum_k Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq n\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}} = \sum_{k \leq n} Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}}.$$

Per ogni $n < m$ si ha allora $S_{n \wedge \tau} - S_{m \wedge \tau} = \sum_{k=n+1}^m Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}}$ e quindi

$$\begin{aligned} (S_{n \wedge \tau} - S_{m \wedge \tau})^2 &= \left(\sum_{k=n+1}^m Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}} \right)^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^m Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}} + 2 \sum_{i=n+1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m Y_i \mathbf{1}_{\{i \leq \tau\}} Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq \tau\}}. \end{aligned}$$

Usando **b23)**, l'ultimo termine ha media nulla, cosicché

$$\mathbb{E}\left((S_{n \wedge \tau} - S_{m \wedge \tau})^2\right) = \sum_{k=n+1}^m \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}}).$$

Poiché da **b22)** la serie $\sum_k \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq \tau\}})$ è convergente, la proprietà di Cauchy richiesta segue immediatamente. Ma allora, esiste il limite in L^2 di $\{S_{n \wedge \tau}\}_n$. Ricordando che $S_{n \wedge \tau} \rightarrow S_\tau$ q.c. e quindi in probabilità e che la convergenza in L^2 implica la convergenza in probabilità, otteniamo immediatamente che $S_{n \wedge \tau} \rightarrow S_\tau$ in L^2 .

b4) Poiché $S_{n \wedge \tau} \rightarrow S_\tau$ in L^2 , in particolare si ha $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau}^2) \rightarrow \mathbb{E}(S_\tau^2)$. Usando **b1)**, abbiamo $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau}) = \sigma^2 \mathbb{E}(n \wedge \tau) \uparrow \sigma^2 \mathbb{E}(\tau)$ quando $n \rightarrow \infty$ per via di MON. Ma allora, $\mathbb{E}(S_\tau^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\tau)$.

b5) Se $\mu \neq 0$, consideriamo le v.a. $\tilde{Y}_k = Y_k - \mu$. Applicando quanto visto a $\tilde{Y}_k$, otteniamo $\mathbb{E}(\tilde{S}_\tau^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\tau)$, dove $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{Y}_k = \sum_{k=1}^n Y_k - n\mu$. Quindi $\tilde{S}_\tau = S_\tau - \mu\tau$ e la tesi è immediata.