Esercitazione XII
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: tempi d'arresto; (super, sub)martingale; teorema d'arresto.

In questa esercitazione faremo uso della seguente

Definizione. (*Processi predicibili*) Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione e $C = \{C_n\}_n$ un processo. C è detto $\mathscr{F}_n$-predicibile se

$$\text{per ogni } n \geq 1,\ C_n \text{ è } \mathscr{F}_{n-1}\text{-misurabile.}$$

Osserviamo che:

1. C_0 non è definito (e comunque, è totalmente ininfluente);
2. un processo $\mathscr{F}_n$-predicibile è anche $\mathscr{F}_n$-adattato (perché $\mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n$).

* *

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione e $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ (quindi può anche prendere il valore $+\infty$) una v.a.

a) Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

- **a1)** τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto[1].
- **a2)** Per ogni $n \geq 0$, $\{\tau > n\} \in \mathscr{F}_n$.
- **a3)** Per ogni $n \geq 0$, $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$.

b) Sia τ un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto. Dimostrare che la σ-algebra degli eventi antecedenti a τ, cioè

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F}_\infty;\ \text{per ogni } n \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n\},$$

essendo $\mathscr{F}_\infty = \vee_n \mathscr{F}_n$, è effettivamente una σ-algebra.

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione.

a) Dimostrare che $\tau = N \in \mathbb{N}$ è sempre un $\mathscr{F}_n$ tempo d'arresto.

b) Siano τ_1 e τ_2 due $\mathscr{F}_n$-tempi d'arresto. Dimostrare che:

[1] Cioè, per ogni $n \geq 0$, $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$.

b1) $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ sono tempi d'arresto, rispetto alla stessa filtrazione;

b2) se $\tau_1 \leq \tau_2$, allora $\mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$;

b3) $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$;

b4) $\{\tau_1 < \tau_2\}$ e $\{\tau_1 = \tau_2\}$ appartengono entrambi a $\mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$

Esercizio 3. Sia $M = \{M_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-supermartingala (o submartingala) a media costante: $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0)$ per ogni n. Dimostrare che $M = \{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

Esercizio 4. Sia $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione.

a) Fissato $n \geq 0$ e $A \in \mathscr{F}_n$, sia

$$\tau(\omega) = \begin{cases} n & \text{se } \omega \in A \\ n+1 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

Dimostrare che τ è un tempo d'arresto limitato rispetto alla filtrazione data.

[Sugg.: fare attenzione alle notazioni.]

b) Sia $M = \{M_n\}_n$ un processo $\mathscr{F}_n$-adattato e integrabile. Dimostrare che $M = \{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala se e solo se per ogni coppia τ_1 e τ_2 di $\mathscr{F}_n$-tempi d'arresto limitati tali che $\tau_1 \leq \tau_2$ si ha $\mathbb{E}(M_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_2})$.

[Sugg.: per ogni n fissato, si prenda τ_1 come in **a)** e $\tau_2 = n + 1$.]

Esercizio 5. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione e X una v.a. integrabile. Al variare di n, definiamo $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)$.

a) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

b) Dimostrare che se τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto limitato si ha

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\tau) = X_\tau.$$

Esercizio 6. *(La rovina del giocatore)* Un giocatore dispone di un capitale iniziale di a Euro e gioca una serie di partite in cui scommette sempre 1 Euro, che vince con probabilità $p \in (0,1)$ oppure perde, con probabilità $1-p$. Egli decide di adottare la seguente strategia: si ferma quando non gli rimane nulla da scommettere (rovina) oppure quando riesce a raggiungere la quota di $c(> a)$ Euro. L'obiettivo è di dimostrare che, posto $\rho = \frac{1-p}{p}$,

$$\mathbb{P}(\text{rovina}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a}{c} & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{1-\rho^a}{1-\rho^c} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

Sia $\{X_n\}_n$ la successione delle possibili vincite: le X_n sono i.i.d. e

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1).$$

Indichiamo con S_n il totale vinto (o perso) dal giocatore al tempo n: $S_0 = 0$ e per $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Dunque, $a + S_n$ dà il capitale di cui può disporre il giocatore all'istante n. Definiamo ora, per x intero,

$$\tau_x = \inf\{n \geq 0 \,:\, a + S_n = x\}$$

Ovviamente, τ_0 è il tempo di rovina, τ_c è l'istante in cui il giocatore raggiunge la vincita che ha deciso sia la massima e $\tau = \tau_0 \wedge \tau_c$ è l'istante in cui il gioco termina. Allora,

$$\mathbb{P}(\text{rovina}) = \mathbb{P}(\tau = \tau_0) = \mathbb{P}(\tau_0 < \tau_c).$$

Per calcolare questa probabilità, useremo il teorema d'arresto. Per questo motivo, definiamo

$$M_n = \begin{cases} a + S_n & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \rho^{a+S_n} & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{dove } \rho = \frac{1-p}{p}$$

e poniamo $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Dimostrare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

b) Dimostrare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto finito q.c.

[Sugg.: osservare che, per ogni N, $\{\tau > N\} \subset \{-\alpha < S_N < \alpha\}$ con $\alpha = \max\{a, c-a\}$, e che dal TLC, per N grande la legge di S_N è circa la legge di una gaussiana di media $\mu_N = N\mu$ e varianza $\sigma_N^2 = N\sigma^2$, essendo $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.]

c) Dedurre che

c1) $\mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}) = M_0$;

c2) esiste $K > 0$ tale che $\sup_n |M_{\tau\wedge n}| < K$;

c3) $\mathbb{E}(M_\tau) = M_0$.

d) Scrivere esplicitamente $\mathbb{E}(M_\tau)$ in termini di $\mathbb{P}(\tau = \tau_0)$ e $\mathbb{P}(\tau = \tau_c) = 1 - \mathbb{P}(\tau = \tau_0)$. Verificare quindi che $\mathbb{P}(\tau = \tau_0)$ soddisfa (1).

Esercizio 7. Sia $C = \{C_n\}_n$ un processo $\mathscr{F}_n$-predicibile e $M = \{M_n\}_n$ un processo $\mathscr{F}_n$-adattato e integrabile. Definiamo

$$X_0 = 0 \text{ e per } n \geq 1,\ X_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1}).$$

a) Provare che se $C = \{C_n\}_n$ è q.c. limitato (cioè, esiste $L > 0$ tale che $\sup_n |C_n| \leq L$ q.c.) allora $X_n \in L^1$ per ogni n.

b) Supponiamo che $X_n \in L^1$ per ogni n.

b1) Dimostrare che se $M = \{M_n\}_n$ è una martingala allora $X = \{X_n\}_n$ rimane una martingala.

b2) Supponiamo che per ogni n, $C_n \geq 0$ q.c. Dimostrare che se $M = \{M_n\}_n$ è una supermartingala (risp. submartingala) allora $X = \{X_n\}_n$ rimane una supermartingala (risp. submartingala).

Esercizio 8. Sia $M = \{M_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-martingala di quadrato integrabile. Dimostrare che, per ogni $n \geq 0$ e $m \geq 1$, l'incremento $M_{n+m} - M_n$ è ortogonale (in L^2) al sottospazio $L^2(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P})$.

Esercizio 9. Sia $M = \{M_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-martingala di quadrato integrabile.

a) Dimostrare che

a1) $\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})^2) = \mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2)$ per ogni $n \geq 1$;

a2) $\{M_n^2\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-submartingala.

b) Sia $A_0 = 0$ e per $n \geq 1$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$.

b1) Provare che $A = \{A_n\}_n$ è un processo integrabile, q.c. non decrescente, $\mathscr{F}_n$-predicibile e tale che $\{M_n^2 - A_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

b2) Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. di quadrato integrabile. Sia $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Poniamo

b21) $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ (con $M_0 = 0$), quando $0 = \mathbb{E}(X_1)$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$;

b22) $M_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ (con $M_0 = 1$), quando $1 = \mathbb{E}(X_1)$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.

Verificare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala di quadrato integrabile e scrivere esplicitamente il processo $\{A_n\}_n$.

Esercizio 10. (*Teorema di decomposizione di Doob*) Sia $M = \{M_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-submartingala. Sia $\{A_n\}_n$ così definito: $A_0 = 0$ e per $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}(M_n - M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}).$$

a) Dimostrare che

a1) $A = \{A_n\}_n$ è un processo integrabile, q.c. non decrescente, $\mathscr{F}_n$-predicibile, con $A_0 = 0$ e tale che $X_n = M_n - A_n$ è una martingala;

a2) $\{A_n\}$ è l'"unico" processo che verifica le proprietà sopra scritte: se $A' = \{A'_n\}_n$ è un processo integrabile, q.c. decrescente, $\mathscr{F}_n$-predicibile, con $A'_0 = 0$ e tale che $X'_n = M_n - A'_n$ è una martingala allora $A' = A$ q.c.

b) Sia

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \,:\, A_n \neq 0\} - 1.$$

Provare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto e che $M^\tau_n = M_{\tau\wedge n}$ è sempre una martingala.

Dedurre quindi che se $M = \{M_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-supermartingala allora $A = \{A_n\}_n$ è l'"unico" processo integrabile, q.c. non crescente, $\mathscr{F}_n$-predicibile, con $A_0 = 0$ e tale che $X_n = M_n + A_n$ è una martingala. Inoltre, $M^\tau_n = M_{\tau\wedge n}$ è sempre una martingala.

Esercizio 11. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. di media μ. Definiamo $X_0 = Y_0$ e per $n \geq 1$, $X_n = X_{n-1} + Y_n f_n(X_0, \ldots, X_{n-1})$, dove, per ogni $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è boreliana, non negativa e limitata. Poniamo $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$.

a) Provare che il processo $X = \{X_n\}_n$ è integrabile e $\mathscr{F}_n$-adattato. Dire se è una $\mathscr{F}_n$-martingala o supermartingala o submartingala.

Supponiamo d'ora in poi che, per $p \in (0, 1/2)$,

$$\mathbb{P}(Y_0 = +1) = p = \mathbb{P}(Y_0 = -1), \quad \mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1 - 2p$$

e che $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_n(x) \leq 1/n^2$. Definiamo $\tau = \inf\{n \geq 0 \,:\, Y_n \neq 0\}$,

b) Provare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto q.c. finito.

c) Dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $\sup_n |X_{\tau\wedge n}| < M$ q.c. e calcolare quindi $\mathbb{E}(X_\tau)$.

Soluzioni

Esercizio 1. a)
a1) $\Leftrightarrow$ **a2)** perché $\{\tau > n\} = \{\tau \le n\}^c$ e $\mathscr{F}_n$ è una σ-algebra.
a1) $\Rightarrow$ **a3)** perché

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \le n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau \le n-1\}^c}_{\in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

a3) $\Rightarrow$ **a1)** perché

$$\{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

b) 1. $\Omega \in \mathscr{F}_\tau$: $\Omega \in \mathscr{F}_\infty$ ($\mathscr{F}_\infty$ è una σ-algebra) e, per ogni n, $\Omega \cap \{\tau \le n\} = \{\tau \le n\} \in \mathscr{F}_n$ perché τ è $\mathscr{F}_n$-misurabile.
2. Se $A \in \mathscr{F}_\tau$ allora $A^c \in \mathscr{F}_\tau$: se $A \in \mathscr{F}_\tau$ allora $A \in \mathscr{F}_\infty$ e quindi $A^c \in \mathscr{F}_\infty$. Inoltre,

$$A^c \cap \{\tau \le n\} = \underbrace{\{\tau \le n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \big(\underbrace{A \cap \{\tau \le n\}}_{\in \mathscr{F}_n}\big)^c \in \mathscr{F}_n.$$

3. Se $\{A_k\} \subset \mathscr{F}_\tau$ allora $\cup_k A_k \in \mathscr{F}_\tau$: in tal caso, ovviamente $\cup_k A_k \in \mathscr{F}_\infty$ ed inoltre

$$(\cup_k A_k) \cap \{\tau \le n\} = \cup_k \underbrace{A_k \cap \{\tau \le n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n$$

Esercizio 2. a) Per $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau \le n\} = \{N \le n\} = \begin{cases} \Omega \in \mathscr{F}_n & \text{se } N \le n \\ \emptyset \in \mathscr{F}_n & \text{se } N > n \end{cases}$$

quindi $\tau = N$ è un t.a. (rispetto a qualsiasi filtrazione).

b1) Si ha,

$$\{\tau_1 + \tau_2 = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau_1 = k, \tau_2 \le n-k\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\underbrace{\{\tau_1 = k\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \le n-k\}}_{\in \mathscr{F}_{n-k} \subset \mathscr{F}_n}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

Poi,

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \le n\} = \underbrace{\{\tau_1 \le n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \le n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

Infine,

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 > n\} = \underbrace{\{\tau_1 > n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 > n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

b2) Intuitivamente questa relazione è evidente: se il tempo τ_1 precede τ_2, allora gli eventi antecedenti a τ_1 sono anche antecedenti τ_2. Verifichiamo formalmente la proprietà. Sia $A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$. Vogliamo verificare che $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$, quindi che

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathscr{F}_n, \qquad \text{per ogni } n.$$

Ma, poiché $\tau_1 \leq \tau_2$, $\{\tau_2 \leq n\} \subset \{\tau_1 \leq n\}$ e quindi $\{\tau_2 \leq n\} = \{\tau_2 \leq n\} \cap \{\tau_1 \leq n\}$. Dunque possiamo scrivere

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \leq n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

b3) $\tau_1 \wedge \tau_2$ è un tempo d'arresto tale che $\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau_i$, $i = 1, 2$, dunque $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathscr{F}_{\tau_i}$, $i = 1, 2$, e quindi $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$. Viceversa, dimostriamo che $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \supset \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$. Preso $A \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$, allora $A \cap \{\tau_i \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, per ogni n e $i = 1, 2$. Quindi,

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} &= A \cap \Big(\{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\} \Big) \\ &= \Big(A \cap \{\tau_1 \leq n\} \Big) \cup \Big(A \cap \{\tau_2 \leq n\} \Big) \in \mathscr{F}_n, \end{aligned}$$

cioè $A \in \mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$.

b4) Osserviamo dapprima che

$$\begin{aligned} \{\tau_1 < \tau_2\} &= \cup_k \underbrace{\{\tau_1 < k\} \cap \{\tau_2 = k\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_\infty} \in \mathscr{F}_\infty \quad \text{e} \\ \{\tau_1 = \tau_2\} &= \cup_k \underbrace{\{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = k\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_\infty} \in \mathscr{F}_\infty. \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni n,

$$\begin{aligned} \{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_1 = n\} &= \{\tau_1 = n\} \cap \{\tau_2 \leq n\}^c \in \mathscr{F}_n \quad \text{e} \\ \{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_2 = n\} &= \{\tau_1 < n\} \cap \{\tau_2 = n\}^c \in \mathscr{F}_n. \end{aligned}$$

Dunque, $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1}$ e $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_2}$, cioè $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$.

Esercizio 3. Supponiamo che $M = \{M_n\}_n$ sia una $\mathscr{F}_n$-supermartingala. Fissato $n \geq 0$, la v.a. $Z_n = M_n - \mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$ è dunque non negativa q.c. Se la media è costante allora

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(M_n) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)) = \mathbb{E}(M_n) - \mathbb{E}(M_{n+1}) = 0$$

e dunque dev'essere $Z_n = 0$ q.c., da cui la tesi.

Esercizio 4. a) Per $k \geq 0$, si ha

$$\{\tau \leq k\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathscr{F}_k & \text{se } k \leq n-1 \\ A \in \mathscr{F}_n & \text{se } k = n \\ \Omega \in \mathscr{F}_k & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

Quindi, τ è un $\mathscr{F}_n$-t.a. Inoltre, $\tau(\omega) \leq n+1$ per ogni ω, dunque è anche limitato.

b) Se M_n è una martingala, basta usare il teorema d'arresto: essendo τ_1 e τ_2 limitati, si ha $\mathbb{E}(M_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_0)$ e $\mathbb{E}(M_{\tau_2}) = \mathbb{E}(M_0)$, da cui segue la tesi.

Viceversa, supponiamo che $\mathbb{E}(M_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_2})$ per ogni coppia di t.a. limitati τ_1 e τ_2 tali che $\tau_1 \leq \tau_2$. Prendiamo allora $n \geq 1$, $A \in \mathscr{F}_n$, τ_1 come in **a)** e $\tau_2 = n+1$. Si tratta di t.a. che soddisfano alle ipotesi scritte sopra, dunque $\mathbb{E}(M_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_2})$. Ora,

$$\mathbb{E}(M_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_1}\mathbf{1}_{\tau_1=n} + M_{\tau_1}\mathbf{1}_{\tau_1=n+1}) = \mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A + M_{n+1}\mathbf{1}_{A^c})$$

e $\mathbb{E}(M_{\tau_2}) = \mathbb{E}(M_{n+1})$. Allora,

$$\mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(M_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(M_{n+1})$$

e quindi $\mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(M_{n+1}\mathbf{1}_A)$. Dall'arbitrarietà di n e $A \in \mathscr{F}_n$, e dalla definizione di media condizionale, si ottiene $\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n$ q.c. per ogni n, da cui la tesi.

Esercizio 5. a) Si ha

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \,|\, \underbrace{\mathscr{F}_{n+1}}_{\supset \mathscr{F}_n}) \,|\, \mathscr{F}_n\big) = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n.$$

b) Sia N tale che $\tau < N$. Per il teorema d'arresto, si ha

$$\mathbb{E}(X_N \,|\, \mathscr{F}_\tau) = X_\tau.$$

Ma

$$\mathbb{E}(X_N \,|\, \mathscr{F}_\tau) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \,|\, \underbrace{\mathscr{F}_N}_{\supset \mathscr{F}_\tau}) \,|\, \mathscr{F}_\tau\big) = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{F}_\tau)$$

da cui la tesi.

Esercizio 6. a) $M_n = \varphi(S_n)$, con $\varphi(x) = a + x$ se $\rho = 1$ e $\varphi(x) = \rho^{a+x}$ se $\rho \neq 1$. Essendo φ boreliana e S_n ovviamente $\mathscr{F}_n$-misurabile per ogni n, segue immediatamente che M_n è $\mathscr{F}_n$-adattata. Poi, $M_n \in L^1$ per ogni n (basta ricordare che S_n assume un numero finito di valori). Infine, se $\rho = 1$,

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} + \underbrace{X_{n+1}}_{\text{ind. da } \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = M_n$$

e se invece $\rho \neq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \cdot \underbrace{\rho^{X_{n+1}}}_{\text{ind. da } \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) \\ &= M_n \cdot \mathbb{E}(\rho^{X_{n+1}}) = M_n\big(\underbrace{\rho^{+1}p + \rho^{-1}(1-p)}_{=1}\big) = M_n\end{aligned}$$

b) τ è un $\mathscr{F}_n$-t.a. perché min tra due tempi di raggiungimento (degli insiemi boreliani $\{0\}$ e $\{c\}$) di un processo $\mathscr{F}_n$-adattato. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}\{\tau > N\} &= \{0 < a + S_n < c \text{ per ogni } n \leq N\} \subset \{0 < a + S_N < c\} \\ &\subset \{-a < S_N < c - a\} \subset \{-\alpha < S_N < \alpha\}\end{aligned}$$

per $\alpha \geq \max(a, c-a)$. Quindi

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = \lim_N \mathbb{P}(\tau > N) \leq \limsup_N \mathbb{P}(-\alpha < S_N < \alpha)$$

Ora, per N grande, per il TLC in legge si ha $S_N \simeq N\mu + \sqrt{N\sigma^2}\, Z$, con $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = \infty) &= \limsup_N \mathbb{P}(-\alpha < N\mu + \sqrt{N\sigma^2}\, Z < \alpha) \\ &= \limsup_N \Big(\Phi\Big(\frac{-\alpha - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}\Big)\Big)\end{aligned}$$

dove Φ denota la f.d. di una gaussiana standard. Ora, per ogni μ si vede facilmente che la quantità a destra è 0, da cui la tesi.

c1) Segue dal teorema d'arresto: $\tau \wedge n$ è un t.a. finito.

c2) Si ha

$$|M_{\tau\wedge n}| = |M_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq n} + M_n \mathbf{1}_{\tau > n}| \leq |M_\tau| \mathbf{1}_{\tau \leq n} + |M_n| \mathbf{1}_{\tau > n}$$

Ma M_τ assume solo due valori: $M_\tau = \varphi(S_\tau)$ e $S_\tau = S_{\tau_0} = -a$ oppure $S_\tau = S_{\tau_c} = c - a$. Se invece $\tau > n$, $a + S_n \in (0, c)$, quindi (essendo φ continua) $M_n = \varphi(S_n)$ è limitata, diciamo che sta in $(-L, L)$, per qualche $L > 0$. Allora,

$$\begin{aligned}|M_{\tau\wedge n}| &= |M_\tau| \mathbf{1}_{\tau \leq n} + |M_n| \mathbf{1}_{\tau > n} \\ &\leq \underbrace{\max\big(|\varphi(-a)|, |\varphi(c-a)|\big)}_{=:\, \ell} + L\mathbf{1}_{\tau > n} \leq \ell + L = K.\end{aligned}$$

c3) Abbiamo: $M_{\tau\wedge n} \to M_\tau$ q.c. per $n \to \infty$ ed inoltre $|M_{\tau\wedge n}| \le K$. Allora, usando (BDD) esiste

$$\mathbb{E}(M_\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$$

d) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_0) &= \mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau=\tau_0} + M_\tau \mathbf{1}_{\tau=\tau_c}) = \mathbb{E}(M_{\tau_0}\mathbf{1}_{\tau=\tau_0}) + \mathbb{E}(M_{\tau_c}\mathbf{1}_{\tau=\tau_c})\\ &= \mathbb{E}(\varphi(\underbrace{S_{\tau_0}}_{=-a})\mathbf{1}_{\tau=\tau_0}) + \mathbb{E}(\varphi(\underbrace{S_{\tau_c}}_{=c-a})\mathbf{1}_{\tau=\tau_c}) = \varphi(-a)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tau=\tau_0}) + \varphi(c-a)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tau=\tau_c})\\ &= \varphi(-a)\mathbb{P}(\tau=\tau_0) + \varphi(c-a)\big(1-\mathbb{P}(\tau=\tau_0)\big)\end{aligned}$$

Ora, se $\rho = 1$, $\mathbb{E}(M_0) = a$ e quindi si ha

$$0 \cdot \mathbb{P}(\tau=\tau_0) + c\big(1-\mathbb{P}(\tau=\tau_0)\big) = a$$

da cui $\mathbb{P}(\tau = \tau_0) = 1 - a/c$; se invece $\rho \neq 1$, $\mathbb{E}(M_0) = \rho^a$ e quindi

$$\rho^0\mathbb{P}(\tau=\tau_0) + \rho^c\big(1-\mathbb{P}(\tau=\tau_0)\big) = \rho^a,$$

da cui $\mathbb{P}(\tau = \tau_0) = 1 - (1-\rho^a)/(1-\rho^c)$.

Esercizio 7. a) Sia $L > 0$ tale che $\sup_n |C_n| \le L$ q.c.Poich`e $M_n \in L^1$ per ogni n, si ha

$$|X_n| \le \sum_{k=1}^n |C_k|\,|M_k - M_{k-1}| \le L \sum_{k=1}^n \big(|M_k| + |M_{k-1}|\big).$$

b1) $X_n \in L^1$ per ogni n per ipotesi. Poiché $C_k(M_k - M_{k-1}$ è $\mathscr{F}_k$-misurabile e $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n$ per ogni $k \le n$, segue immediatamente che X_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, quindi X è adattato. Infine, per ogni n, essendo $X_{n+1} = X_n + C_{n+1}(M_{n+1} - M_n)$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}\big(\underbrace{X_n}_{\text{è } \mathscr{F}_n\text{-mis}} + \underbrace{C_{n+1}}_{\text{è } \mathscr{F}_n\text{-mis}}(M_{n+1}-M_n)\,|\,\mathscr{F}_n\big)\\ &= X_n + C_{n+1}\underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n\,|\,\mathscr{F}_n)}_{=0\ [M_n \text{ è } \mathscr{F}_n\text{-mg}]} = X_n\end{aligned}$$

b2) X è adattato ed integrabile, per quanto visto sopra. Poi, per ogni n si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}\big(\underbrace{X_n}_{\text{è } \mathscr{F}_n\text{-mis}} + \underbrace{C_{n+1}}_{\text{è } \mathscr{F}_n\text{-mis}}(M_{n+1}-M_n)\,|\,\mathscr{F}_n\big)\\ &= X_n + \underbrace{C_{n+1}}_{\ge 0 \text{ q.c.}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n\,|\,\mathscr{F}_n)}_{\le 0\ [M_n \text{ è } \mathscr{F}_n\text{-supermg}]} \le X_n\end{aligned}$$

Esercizio 8. Presa $Z \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P})$,

$$\langle Z, M_{n+m} - M_n \rangle_{L^2} = \mathbb{E}\big(Z(M_{n+m} - M_n)\big)$$
$$= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\underbrace{Z}_{\mathscr{F}_n\text{-mis}} (M_{n+m} - M_n) \,|\, \mathscr{F}_n\big)\big) = \mathbb{E}\big(Z \underbrace{\mathbb{E}\big(M_{n+m} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n\big)}_{= 0 \ [M_n \text{ è } \mathscr{F}_n\text{-supermg}]}\big) = 0$$

Esercizio 9. a1) Si ha

$$\mathbb{E}\big((M_n - M_{n-1})^2\big) = \mathbb{E}\big(M_n^2 + M_{n-1}^2 - 2M_n M_{n-1}\big)$$

Ora,

$$\mathbb{E}(M_n M_{n-1}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(M_n M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})\big) = \mathbb{E}\big(M_{n-1}\mathbb{E}(M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})\big)$$
$$= \mathbb{E}(M_{n-1}^2)$$

Sostituendo, si ha $\mathbb{E}\big((M_n - M_{n-1})^2\big) = \mathbb{E}\big(M_n^2 - M_{n-1}^2\big)$.
a2) $M_n^2 \in L^1$ ed è $\mathscr{F}_n$ misurabile. Inoltre, dalla disuguaglianza d Jensen per la media condizionata, si ha

$$\mathbb{E}(M_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n) \geq \big(\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\big)^2 = M_n^2.$$

b1) $A_n \in L^1$ perché $\mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \in L^1$ per ogni k. Inoltre, q.c. si ha

$$A_{n+1} = A_n + \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 \,|\, \mathscr{F}_n)}_{\geq 0 \ [M_n \text{ è } \mathscr{F}_n\text{-submg}]} \geq A_n$$

dunque è non decrescente. Inoltre,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1})}_{\mathscr{F}_{k-1}\text{-mis, quindi } \mathscr{F}_{n-1}\text{-mis}} \text{ è } \mathscr{F}_{n-1}\text{-mis}$$

dunque A_n è predicibile. Infine,

$$\mathbb{E}(M_{n+1}^2 - \underbrace{A_{n+1}}_{\text{è } \mathscr{F}_n\text{-mis}} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n) - A_{n+1}$$
$$= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n) - \big(A_n + \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 \,|\, \mathscr{F}_n)\big) = M_n^2 - A_n$$

da cui la tesi.
b21) Sappiamo che M_n è una martingala (cfr. Esercizio 6) e $M_n \in L^2$ per ogni n perché somma di v.a. di quadrato integrabile. Essendo $M_k = M_{k-1} + X_k$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big((M_{k-1}+X_k)^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 + 2M_{k-1}^2 X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$$

Ma X_k è indipendente da $\mathscr{F}_{k-1}$ e M_{k-1} è $\mathscr{F}_{k-1}$-misurabile, quindi

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) + 2M_{k-1}^2 \mathbb{E}(X_k) = \sigma^2 n.$$

b22) M_n è ovviamente $\mathscr{F}_n$-misurabile e di quadrato integrabile (perché prodotto di n v.a. indipendenti di L^2). Inoltre, essendo $M_{n+1} = M_n X_{n+1}$ e X_{n+1} indipendente da $\mathscr{F}_n$, si ha

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(M_n X_{n+1} \,|\mathscr{F}_n) = M_n \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1})}_{=1} = M_n.$$

Poi,

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_{k-1}^2 X_k^2 - M_{k-1}^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(M_{k-1}^2 (X_k^2 - 1) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\big) \end{aligned}$$

Ma X_k è indipendente da $\mathscr{F}_{k-1}$ e M_{k-1} è $\mathscr{F}_{k-1}$-misurabile, quindi

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^2 \mathbb{E}(X_k^2 - 1) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^2.$$

Esercizio 10. a) $A_n \in L^1$ per ogni n perché somma di v.a. di L^1. Inoltre, per ogni n, q.c. si ha

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n) \geq A_n$$

perché M_n è submartingala. Infine, A_n è somma di v.a. $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabili, quindi dà luogo ad un processo predicibile. Infine,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(M_{n+1} - A_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) - A_{n+1} \\ &= \mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) - A_n - \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n - A_n = X_n \end{aligned}$$

a2) Sia A'_n un processo predicibile, integrabile, q.c. non decrescente, con $A'_0 = 0$, tale che $X'_n = M_n - A'_n$ è una martingala. Allora, $M_n = X_n + A_n = X'_n + A'_n$ e

$$\begin{aligned} A'_n - A_n &= X_n - X'_n = \mathbb{E}(X_{n+1} - X'_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(A'_{n+1} - A_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = A'_{n+1} - A_{n+1} \end{aligned}$$

dunque $A'_n - A_n = A'_0 - A_0 = 0$ q.c. per ogni n.

b) Osserviamo che, partendo A da 0 ed essendo crescente (non decrescente), τ dà l'ultimo istante in cui A è nullo. Usando la predicibilità di A, si ha

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{A_1 = 0, \dots, A_n = 0, A_{n+1} > 0\} \\ &= \underbrace{\{A_1 = 0\}}_{\in \mathscr{F}_0} \bigcap \cdots \bigcap \underbrace{\{A_n = 0\}}_{\in \mathscr{F}_{n-1}} \bigcap \underbrace{\{A_{n+1} > 0\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n\end{aligned}$$

dunque τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto. Osserviamo poi che

$$A_n^\tau = A_{\tau\wedge n} = A_\tau \mathbf{1}_{\tau \le n} + A_n \mathbf{1}_{\tau > n}$$

Ma, $A_\tau = 0$ e se $\tau > n$ allora evidentemente $A_n = 0$, quindi $A_n^\tau = 0$. Allora,

$$M_n^\tau = X_n^\tau$$

ed essendo X^τ la martingala arrestata, segue immediatamente che M_n^τ è una martingala.

La deduzione richiesta è immediata conseguenza del fatto che $-M_n$ è una submartingala se M_n è una supermartingala (e che $-X_n$ è una martingala se X_n è una martingala).

Esercizio 11. a) Poiché $X_n - X_{n-1} = Y_n f_n(X_0, \dots, X_n)$, si ha

$$\begin{aligned}|X_n| \le |X_0| + |X_n - X_0| &= |Y_0| + \Big|\sum_{k=1}^n Y_k f_k(X_0, \dots, X_k)\Big| \\ &\le |Y_0| + \sum_{k=1}^n |Y_k| f_k(X_0, \dots, X_k) \le |Y_0| + \sum_{k=1}^n |Y_k| L_k\end{aligned}$$

dove L_k è t.c. $(0 \le) f_k(x) \le L_k$ per ogni $x \in \mathbb{R}^k$. Essendo $Y_0, \dots, Y_n$ integrabili, ne segue che X_n è integrabile, per ogni n. Poi, $X_0 = Y_0$ è ovviamente $\mathscr{F}_0$-misurabile. Supponiamo quindi che X_n sia $\mathscr{F}_n$-misurabile e proviamo che X_{n+1} è $\mathscr{F}_{n+1}$-misurabile: X_{n+1} è funzione (misurabile) di $X_0, \dots, X_n$ e di Y_{n+1}. Essendo tali v.a. tutte $\mathscr{F}_{n+1}$-misurabili, la tesi segue immediatamente. Infine,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}\Big(\underbrace{X_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis}} + \underbrace{Y_{n+1}}_{\text{indip. da } \mathscr{F}_n} \underbrace{f_{n+1}(X_0, \dots, X_n)}_{\mathscr{F}_n\text{-mis}} \,|\, \mathscr{F}_n\Big) \\ &= X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) f_n(X_0, \dots, X_n) = X_n + \mu f_n(X_0, \dots, X_n)\end{aligned}$$

dove $\mu = \mathbb{E}(Y_n)$. Ricordando che $f_n \ge 0$, otteniamo:

- $\mu > 0$: $\{X_n\}_n$ è $\mathscr{F}_n$-submartingala;

- $\mu = 0$: $\{X_n\}_n$ è $\mathscr{F}_n$-martingala;
- $\mu < 0$: $\{X_n\}_n$ è $\mathscr{F}_n$-supermartingala.

b) Si ha, per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{Y_0 = 0, \dots, Y_{n-1} = 0, Y_n \neq 0\} \\ &= \underbrace{\{Y_0 = 0\}}_{\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \cdots \bigcap \underbrace{\{Y_{n-1} = 0\}}_{\in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \underbrace{\{Y_n \neq 0\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n\end{aligned}$$

dunque τ è un t.a. È q.c. finito perché

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = \infty) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tau > N) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(Y_0 = 0, \dots, Y_N = 0) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(Y_0 = 0)^{N+1} = \lim_{N\to\infty} (1-2p)^{N+1} = 0.\end{aligned}$$

c) Si ha

$$X_{\tau\wedge n} = X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\tau\leq n} + X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\tau>n} = X_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq n} + X_n \mathbf{1}_{\tau>n} = \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbf{1}_{\tau=k} + X_n \mathbf{1}_{\tau>n}$$

Ma, su $\{\tau = k\}$ si ha $0 = Y_0 = \cdots = Y_{k-1}$ e $Y_k \neq 0$, quindi $0 = X_0 = \cdots = X_{k-1}$ e $X_k = Y_k f_k(0, \dots, 0)$. Invece, su $\{\tau > n\}$ si ha $Y_0 = \cdots = Y_n = 0$, quindi $0 = X_0 = \cdots = X_n$. Dunque

$$X_{\tau\wedge n} = \sum_{k=1}^{n} Y_k f_k(0) \mathbf{1}_{\tau=k}$$

Passando ai moduli, ricordando che $|Y_k| \leq 1$ q.c. e $f_k(0) \leq 1/k^2$, q.c. si ha

$$|X_{\tau\wedge n}| \leq \sum_{k=1}^{n} |Y_k| f_k(0) \mathbf{1}_{\tau=k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} =: M$$

Osserviamo che qui $\mu = 0$, quindi X_n è una martingala. Per il teorema d'arresto, si ha

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) = 0.$$

Ma, $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau$ q.c. per $n \to \infty$ perché τ è q.c. finito e abbiamo visto che $X_{\tau\wedge n}$ è uniformemente q.c. limitata. Allora, per BDD si ha

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = 0.$$