Esercitazione XI
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: media condizionale.

Esercizio 1. Sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. di L^1 e $\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{C})$, con $\mathscr{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ partizione al più numerabile di Ω. Dimostrare che

$$\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) = \sum_{i\in I\setminus I_0} \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{C_i})}{\mathbb{P}(C_i)}\,\mathbf{1}_{C_i} \text{ q.c.}$$

dove $I_0 = \{i \in I \,:\, \mathbb{P}(C_i) = 0\}$.

Esercizio 2. Siano X e Y due v.a. discrete, di densità (discreta) congiunta $p_{XY}(x,y)$. Si ponga $E_Y = \{y \,:\, p_Y(y) > 0\}$, con p_Y la densità discreta marginale di Y, e

$$\Psi_X(y) = \sum_x x\, p_{X|Y}(x|y) \equiv \sum_x x\, \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} \quad y \in E_Y$$

e (ad esempio) $\Psi_X(y) = 0$ se $y \notin E_Y$. Dimostrare che

$$\mathbb{E}(X \,|\, Y) = \Psi_X(Y) \text{ q.c.}$$

Esercizio 3. Sia (X, Y) una v.a. assolutamente continua di densità (continua) congiunta $p_{XY}(x,y)$. Si ponga $E_Y = \{y \,:\, p_Y(y) > 0\}$, con p_Y la densità discreta marginale di Y, e

$$\Psi_X(y) = \int x\, p_{X|Y}(x|y)\, dy \equiv \int x\, \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}\, dy \quad y \in E_Y$$

e (ad esempio) $\Psi_X(y) = 0$ se $y \notin E_Y$. Dimostrare che

$$\mathbb{E}(X \,|\, Y) = \Psi_X(Y) \text{ q.c.}$$

Esercizio 4. Sia $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$ generata da un π-system $\mathscr{I}$: $\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{I})$. Siano X una v.a. integrabile e Y una v.a. $\mathscr{G}$-misurabile e integrabile tali che

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) \text{ per ogni } A \in \mathscr{I}.$$

Dimostrare che $Y = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ q.c.

[Sugg: • due misure finite che coincidono su un π-system coincidono sulla σ-algebra generata dal π-system; • per ogni v.a. Z si ha $Z = Z^+ - Z^-$, con $Z^\pm \geq 0$; • per ogni v.a. $W \geq 0$ q.c. $A \mapsto \mu(A) = \mathbb{E}(W\mathbf{1}_A)$ definisce una misura (eventualmente non finita) al variare di A in una σ-algebra.]

Esercizio 5. Sia $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$ e sia X una v.a. integrabile. Dimostrare che Y è una versione di $\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})$ se e solo

(i) Y è $\mathscr{G}$-misurabile e integrabile;

(ii) per ogni v.a. Z che sia $\mathscr{G}$-misurabile e q.c. limitata, si ha $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(YZ)$.

[Sugg: le v.a. limitate sono limite di v.a. che possono assumere un numero finito di valori.]

Esercizio 6. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità.

a) Siano $B \in \mathscr{F}$ tale che $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$ e $\mathbb{P}_0$ la probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ condizionata a B: per $A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

a1) Dimostrare che $\mathbb{P}(B\,|\,\mathscr{G}) > 0$ $\mathbb{P}_0$-q.c.

a2) Dimostrare che[1], per $A \in \mathscr{F}$,

$$\mathbb{P}_0(A\,|\,\mathscr{G}) = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B\,|\,\mathscr{G})}$$

b) Sia $\mathscr{H} = \sigma(B_1, B_2., \ldots)$, con $\{B_1, B_2., \ldots\}$ partizione di Ω, e sia $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{G}$. Dimostrare che[2], per $A \in \mathscr{F}$,

$$\mathbb{P}(A\,|\,\mathscr{G} \vee \mathscr{H}) = \sum_i \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{B_i}$$

(si ponga, ad esempio, $\frac{\mathbb{P}(A \bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})} = 0$ quando $\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G}) = 0$).

Esercizio 7. Siano $\mathscr{G}_1$ e $\mathscr{G}_2$ sotto σ-algebre di $\mathscr{F}$ tali che $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2$. Dimostrare che per ogni $X \in L^2$ si ha

$$\mathbb{E}\Big([X - \mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}_2)]^2\Big) \le \mathbb{E}\Big([X - \mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}_1)]^2\Big)$$

(cioè, la dispersione di X intorno alla sua media condizionale diminuisce all'ingrandirsi della σ-algebra condizionante).

Esercizio 8. Per $X \in L^2$ e $\mathscr{G}$ sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$, definiamo

$$\mathrm{Var}(X\,|\,\mathscr{G}) = \mathbb{E}\Big([X - \mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})]^2\,|\,\mathscr{G}\Big)$$

Dimostrare che

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\Big(\mathrm{Var}(X\,|\,\mathscr{G})\Big) + \mathrm{Var}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})\Big).$$

[1] Ricordiamo che $\mathbb{P}_0 \ll \mathbb{P}$ e che $\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}} = \mathbf{1}_B$. Quindi, $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_0)$ se e solo se $X\mathbf{1}_B \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}_0(X) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_B)$.

[2] Al solito, $\mathscr{G} \vee \mathscr{H}$ denota la σ-algebra generata da $\mathscr{G} \bigcup \mathscr{H}$. Ricordiamo che $\mathscr{I} = \{G \bigcap H\,:\,G \in \mathscr{G}, H \in \mathscr{H}\}$ è un π-system che genera $\mathscr{G} \vee \mathscr{H}$.

Esercizio 9. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. q.c. non negativa, di media 1 e sia $\mathbb{Q}$ la misura (di probabilità) definita da

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = X.$$

Indicheremo con $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ la media rispettivamente sotto $\mathbb{P}$ e sotto[3] $\mathbb{Q}$. Sia Y una v.a. di legge $\mu_{\mathbb{P}}$ e $\mu_{\mathbb{Q}}$ rispettivamente sotto $\mathbb{P}$ e sotto $\mathbb{Q}$. Dimostrare che

a) $\mu_{\mathbb{Q}} \ll \mu_{\mathbb{P}}$;

b) $\frac{d\mu_{\mathbb{Q}}}{d\mu_{\mathbb{P}}}(y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \mid Y = y)$ (il che dà un'interessante rappresentazione della media condizionale).

Esercizio 10. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano Z una v.a. reale non negativa e $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$.

a) Dimostrare che:

a1) $Z\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \mid \mathscr{G})=0\}} = 0$ q.c.;

a2) per ogni v.a. Y tale che $YZ \in L^1$ si ha

$$\mathbb{E}(YZ \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(YZ \mid \mathscr{G})\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \mid \mathscr{G})>0\}}.$$

b) Supponiamo per di più che $\mathbb{E}(Z) = 1$. Sia $\mathbb{Q}$ la misura (di probabilità) su $(\Omega, \mathscr{F})$ che ha densità Z rispetto a $\mathbb{P}$ e sia $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ l'aspettazione sotto $\mathbb{Q}$ (continueremo ad usare $\mathbb{E}$ per denotare l'aspettazione sotto $\mathbb{P}$). Dimostrare che:

b1) $\mathbb{E}(Z \mid \mathscr{G}) > 0$ $\mathbb{Q}$-q.c.;

b2) per ogni v.a. Y integrabile sotto $\mathbb{Q}$ si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y \mid \mathscr{G}) = \frac{\mathbb{E}(YZ \mid \mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z \mid \mathscr{G})} \quad \mathbb{Q}\text{-q.c.}$$

Esercizio 11. **a)** Siano X, Y, Z v.a. tali che (X, Y) e (Z, Y) abbiano la stessa legge e sia h una funzione boreliana tale che $h(X)$ sia integrabile. Dimostrare che:

$$\mathbb{E}(h(X) \mid Y) = \mathbb{E}(h(Z) \mid Y) \quad \text{q.c.}$$

b) Siano $T_1, \dots, T_n$ v.a. i.i.d. Posto $T = T_1 + \dots + T_n$, dimostrare che

$$\mathbb{E}(T_i \mid T) = \frac{T}{n} \quad \text{q.c. per ogni } i = 1, \dots, n.$$

[Sugg.: le v.a. $(T_1, T), \dots, (T_n, T)$ hanno la stessa legge...]

[3] Ricordiamo, qualora fosse necessario, che essendo $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ con derivata di RN X, si ha $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(XZ)$.

Esercizio 12. *(Leggi condizionali di vettori gaussiani)*

a) Siano Y e Z v.a. indipendenti e sia ϕ una funzione boreliana. Dimostrare che per ogni boreliano A,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Z+\phi(Y)\in A} \,|\, Y = y) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Z+\phi(y)\in A}).$$

Equivalentemente, si ha che la legge condizionale di $X = Z + \phi(Y)$ dato $Y = y$ è la legge di $Z + \phi(y)$.

b) Siano X e Y dei vettori gaussiani, a valori in $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^p$ rispettivamente[4]. Supponiamo che anche congiuntamente il vettore (X, Y) abbia legge gaussiana, su $\mathbb{R}^{k+p}$, di media e matrice di covarianza date rispettivamente da[5]

$$m = \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} C_X & C_{XY} \\ C_{YX} & C_Y \end{pmatrix}$$

Si supponga che C_Y sia definita positiva (e quindi invertibile). Determinare una matrice $k \times p$, chiamiamola A, tale che $X - AY$ e Y siano indipendenti.

c) Usando **a)** e **b)**, provare che la legge condizionale di X dato $Y = y$ è ancora gaussiana di media

$$m_X + C_{XY}C_Y^{-1}(y - m_Y)$$

e matrice di covarianza

$$C_X - C_{XY}C_Y^{-1}C_{YX}$$

(si noti che quest'ultima non dipende da y).

d) Sia X un segnale di legge $\mathrm{N}(0, 1)$. Un osservatore non ha accesso al valore di X, di cui conosce solo un'osservazione $Y = X + W$, dove W è un rumore di legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ indipendente da X. Come si comporta in media X quando si osserva $Y = y$? Come varia la sua varianza quando si osserva $Y = y$?

e) Lo stesso osservatore, per migliorare la stima del segnale X, decide di effettuare due osservazioni $Y_1 = X + W_1$ e $Y_2 = X + W_2$, con X, W_1 e W_2 indipendenti e quest'ultime di legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Volendo stimare X con la sua aspettazione condizionale date le osservazioni $(Y_1, Y_2) = (y_1, y_2)$, la varianza di questo stimatore è diminuita rispetto a quella di cui al punto precedente? In altre parole, più osservazioni consentono una stima migliore?

---

[4] Eventualmente, in un primo momento si supponga $k = p = 1$.

[5] Per ulteriore chiarezza, si ha: $(m_X)_i = \mathbb{E}(X_i)$ $i = 1, \ldots, k$; $(m_Y)_i = \mathbb{E}(Y_i)$ $i = 1, \ldots, p$; $(C_X)_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ $i, j = 1, \ldots, k$; $(C_{XY})_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$ $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, p$; $(C_{YX})_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, X_j)$ $i = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, k$; $(C_Y)_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ $i = 1, \ldots, p$. Si noti che C_{XY} e C_{YX} sono l'una la trasposta dell'altra.

Esercizio 13. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano X e Y due v.a. i.i.d. bernoulliane di parametro $p \in (0,1)$. Sia $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$.

a) Scrivere la partizione (finita) $\mathscr{C} = \{C_i\}_{i \in I} \subset \mathscr{F}$ di Ω tale che $\sigma(Z) = \sigma(\mathscr{C})$. Verificare che per $W \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, la v.a. $\mathbb{E}(W \,|\, Z)$ è q.c. costante su ciascun elemento C_i della partizione $\mathscr{C}$ (e scrivere tali costanti).

b) Usando **a)**, calcolare $\mathbb{E}(X \,|\, Z)$ e $\mathbb{E}(Y \,|\, Z)$ e dire se si tratta di v.a. indipendenti.

c) Siano $\{X_n\}_n$ e $\{Y_n\}_n$ due successioni indipendenti di v.a. i.i.d. bernoulliane di parametro $p \in (0,1)$. Discutere la convergenza debole, per $n \to \infty$, di

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(X_k \,|\, Z_k\big) - \sqrt{n}\, p,$$

dove $Z_k = \mathbf{1}_{\{X_k + Y_k = 0\}}$.

Esercizio 14. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. indipendenti. Definiamo $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e $\mathscr{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$. Dimostrare che per ogni funzione f boreliana e limitata si ha

$$\mathbb{E}\big(f(S_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\big) = \mathbb{E}\big(f(S_n) \,|\, S_{n-1}\big), \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Soluzioni

Ricordiamo le notazioni usate a lezione: per X v.a. integrabile e $\mathscr{G}$ sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$, Z è una versione di $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ se:

(MC1) Z è $\mathscr{G}$-misurabile e integrabile,

(MC2) per ogni $\Gamma \in \mathscr{G}$, $\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_\Gamma)$.

Esercizio 1 Poiché $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ è $\mathscr{G}$-misurabile e $\mathscr{G}$ è generata da una partizione al più numerabile, $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ è costante sugli elementi della partizione, quindi

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})\mathbf{1}_{C_i} = \alpha_i \mathbf{1}_{C_i} \in \mathbb{R}.$$

Ora, $C_i \in \mathscr{G}$ quindi dalla seconda proprietà caratteristica delle medie condizionali si ha

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{C_i}) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})\mathbf{1}_{C_i}\Big) = \mathbb{E}(\alpha_i\mathbf{1}_{C_i}) = \alpha_i\mathbb{P}(C_i)$$

Allora, se $i \notin I_0$,

$$\alpha_i = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{C_i})}{\mathbb{P}(C_i)}$$

Poiché $N = \bigcup_{i\in I_0} C_i \in \mathscr{G}$ ed ha probabilità nulla, possiamo concludere che

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) = \sum_{i \in I\setminus I_0} \alpha_i \mathbf{1}_{C_i} = \sum_{i \in I\setminus I_0} \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{C_i})}{\mathbb{P}(C_i)} \mathbf{1}_{C_i} \text{ q.c.}$$

Esercizio 2 Poniamo $Z = \Psi_X(Y)$. Mostriamo che Z soddisfa (MC1) e (MC2), il che peraltro conferma quanto visto nei corsi precedenti, cioè che

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \sum_x x\, p_{X|Y}(x|y)$$

per $y \in E_Y$ e $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ si può definire come si vuole purché misurabile per $y \notin E_Y$ (infatti, $\{Y \notin E_Y\} \in \mathscr{G} \equiv \sigma(Y)$ e $\mathbb{P}(Y \notin E_Y) = 0$).
(MC1) $\Psi_X(y)$ è boreliana, quindi Z è $\sigma(Y)$-misurabile. Inoltre,

$$\mathbb{E}(|Z|) = \sum_y |\Psi_X(y)| p_Y(y) \le \sum_{x,y} |x| p_{XY}(x, y) = \mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

(MC2) Sia $\Gamma \in \mathscr{G} \equiv \sigma(Y)$. Allora, esiste A boreliano tale che $\Gamma = Y^{-1}(A) = \{Y \in A\}$ e si ha:

$$\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}(\Psi_X(Y)\mathbf{1}_{Y\in A}) = \sum_{y\in A} \Psi_X(y) p_Y(y)$$

$$= \sum_{y \in A \bigcap E_Y} \sum_x p_{XY}(x,y)$$
$$= \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{Y\in A\bigcap E_Y}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{Y\in A}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_\Gamma)$$

perché $\mathbb{P}(Y \in E_Y) = 1$.

Esercizio 3 Poniamo $Z = \Psi_X(Y)$. Mostriamo che Z soddisfa (MC1) e (MC2), il che peraltro conferma quanto visto nei corsi precedenti, cioè che

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int x\, p_{X|Y}(x|y)\, dx$$

per $y \in E_Y$ e $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ si può definire come si vuole purché misurabile per $y \notin E_Y$ (infatti, $\{Y \notin E_Y\}\mathscr{G} \equiv \sigma(Y)$ e $\mathbb{P}(Y \notin E_Y) = 0$).
(MC1) $\Psi_X(y)$ è boreliana, quindi Z è $\sigma(Y)$-misurabile. Inoltre,

$$\mathbb{E}(|Z|) = \int |\Psi_X(y)| p_Y(y)\, dy \leq \int \int |x| p_{XY}(x,y)\, dxdy = \mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

(MC2) Sia $\Gamma \in \mathscr{G} \equiv \sigma(Y)$. Allora, esiste A boreliano tale che $\Gamma = Y^{-1}(A) = \{Y \in A\}$ e si ha:

$$\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}(\Psi_X(Y)\mathbf{1}_{Y\in A}) = \int_A \Psi_X(y) p_Y(y)\, dy$$
$$= \int_{A\bigcap E_Y} dy \int x\, p_{XY}(x,y)\, dx$$
$$= \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{Y\in A\bigcap E_Y}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{Y\in A}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_\Gamma)$$

perché $\mathbb{P}(Y \in E_Y) = 1$.

Esercizio 4. Si ha $X = X^+ - X^-$ e $Y = Y^+ - Y^-$, con $X^\pm, Y^\pm \geq 0$. Quindi, per $A \in \mathscr{G}$, le mappe

$$\mu_1^\pm(A) = \mathbb{E}(X^\pm \mathbf{1}_A) \quad \text{e} \quad \mu_2^\pm(A) = \mathbb{E}(Y^\pm \mathbf{1}_A)$$

definiscono delle misure finite. La condizione dà

$$\mu_1^\pm \equiv \mu_2^\pm \text{ su } \mathscr{I}$$

così che

$$\mu_1^\pm \equiv \mu_2^\pm \text{ su } \sigma(\mathscr{I}) = \mathscr{G}.$$

Allora, per ogni $A \in \mathscr{G}$ si ottiene

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X^+\mathbf{1}_A) - \mathbb{E}(X^-\mathbf{1}_A) = \mu_1^+(A) - \mu_1^-(A)$$
$$= \mu_2^+(A) - \mu_2^-(A) = \mathbb{E}(Y^+\mathbf{1}_A) - \mathbb{E}(Y^-\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A)$$

e quindi la v.a. $\mathscr{G}$-misurabile Y è una versione di $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$.

Esercizio 5. La condizione (i) equivale a (MC1). Dunque occorre mostrare che (ii) e (MC2) sono equivalenti, cioè

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_\Gamma) \text{ per ogni } \Gamma \in \mathscr{G}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(YZ) \text{ per ogni v.a. } Z \ \mathscr{G}\text{-misurabile e limitata}$$

$(\Leftarrow)$ Elementare, basta prendere $Z = \mathbf{1}_\Gamma$.
$(\Rightarrow)$ Supponiamo dapprima che $Z \in (SF)^+$: $Z = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{A_j}$, con N opportuno, $a_1, \ldots, a_N \geq 0$ e $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{G}$ (Z è $\mathscr{G}$-misurabile!) e

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}\Big(X \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{A_j}\Big) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_j}) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{A_j})$$
$$= \mathbb{E}\Big(Y \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{A_j}\Big) = \mathbb{E}(YZ)$$

Prendiamo ora Z $\mathscr{G}$-misurabile e q.c. limitata. Osserviamo che poiché Z è q.c. limitata, senz'altro XZ e YZ sono integrabili (ad esempio, $|XZ| \leq |X| \cdot C$ q.c., con C costante positiva). Inoltre, $Z = Z^+ - Z^-$, con $Z^\pm \geq 0$ $\mathscr{G}$-misurabili (e q.c. limitate, quindi $XZ^\pm$ e $YZ^\pm$ sono integrabili). Quindi, esistono due successioni $\{Z_n^\pm\}_n \subset (SF)^+$ tali che $Z_n^\pm \uparrow Z^\pm$. Ora, usando (MON), si ha

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(XZ^+) - \mathbb{E}(XZ^-) = \lim_n \Big(\mathbb{E}(XZ_n^+) - \mathbb{E}(XZ_n^-)\Big)$$
$$= \lim_n \Big(\mathbb{E}(YZ_n^+) - \mathbb{E}(YZ_n^-)\Big) = \mathbb{E}(YZ^+) - \mathbb{E}(YZ^-) = \mathbb{E}(YZ)$$

da cui la tesi.

Esercizio 6. a1) Posto $G = \{\mathbb{P}(B \mid \mathscr{G}) \leq 0\}$, $\mathbb{P}_0(G) = 0$ se e solo se $\mathbb{P}(G \cap B) = 0$. Poiché $G \in \mathscr{G}$, si ha

$$0 \leq \mathbb{P}(B \cap G) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B\cap G}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mathbf{1}_G) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{P}(B \mid \mathscr{G})\mathbf{1}_G\Big) \leq 0$$

e quindi $\mathbb{P}(B \cap G) = 0$.

a2) La v.a. $\mathscr{G}$-misurabile e q.c. non negativa $Y = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B \mid \mathscr{G})}{\mathbb{P}(B \mid \mathscr{G})}$ è una versione di $\mathbb{P}_0(A \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_A \mid \mathscr{G})$ se e solo se

$$\mathbb{E}_0(Y\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_\Gamma)$$

per ogni $\Gamma \in \mathscr{G}$. Infatti, si ha:

$$\mathbb{E}_0(Y\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_\Gamma\mathbf{1}_B) = \mathbb{E}\Big(\frac{\mathbb{P}(A \bigcap B \mid \mathscr{G})}{\mathbb{P}(B \mid \mathscr{G})}\mathbf{1}_\Gamma \mathbf{1}_B\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(\underbrace{\frac{\mathbb{P}(A\bigcap B\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_\Gamma}_{\text{è } \mathscr{G}\text{-misurabile}}\mathbf{1}_B\Big)\,\Big|\,\mathscr{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(\frac{\mathbb{P}(A\bigcap B\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_\Gamma\mathbb{E}(\mathbf{1}_B\,|\,\mathscr{G})\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A\bigcap B}\,|\,\mathscr{G})\underbrace{\mathbf{1}_\Gamma}_{\text{è } \mathscr{G}\text{-mis.}}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A\bigcap B}\mathbf{1}_\Gamma\,|\,\mathscr{G})\Big)$$

$$= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_\Gamma\mathbf{1}_B) = \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_\Gamma)$$

b) Se $\mathscr{I} = \{G\bigcap H \,:\, G\in\mathscr{G}, H\in\mathscr{H}\}$, allora $\mathscr{I}$ è un π-system che genera $\mathscr{G}\vee\mathscr{H}$. Dunque, fissato $A\in\mathscr{F}$, basta far vedere che per ogni $G\in\mathscr{G}$ e $H\in\mathscr{H}$ si ha

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{G\bigcap H}) = \mathbb{E}\Big(\sum_i \frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_{B_i}\,\mathbf{1}_{G\bigcap H}\Big)$$

E ricordando che $H\in\mathscr{H}$ se e solo se $H = \bigcup_{i\in I_H} B_i$, occorre mostrare che

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{G\bigcap H}) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in I_H} \frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_{B_i}\,\mathbf{1}_G\Big)$$

La dimostrazione si può fare direttamente o anche usando il punto **a)**. Vediamo entrambi i modi.

Direttamente, si ha:

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i\in I_H} \frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_{B_i}\,\mathbf{1}_G\Big) \underbrace{=}_{\text{(MON)}} \sum_{i\in I_H}\mathbb{E}\Big(\underbrace{\frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_G}_{\text{è } \mathscr{G}\text{-misurabile e q.c. limitata}}\,\mathbf{1}_{B_i}\Big)$$

$$= \sum_{i\in I_H}\mathbb{E}\Big(\frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_G\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_i}\,|\,\mathscr{G})\Big)$$

$$= \sum_{i\in I_H}\mathbb{E}\Big(\frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_G\,\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})\Big)$$

$$\underbrace{=}_{\text{(MON)}} \mathbb{E}\Big(\sum_i \mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})\mathbf{1}_{B_i}\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{P}(A\,|\,\mathscr{G})\mathbf{1}_{G\bigcap H}\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\,|\,\mathscr{G})\mathbf{1}_{G\bigcap H}\Big) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{G\bigcap H})$$

Secondo modo: come conseguenza di **a)**. Sia $I = \{i \,:\, \mathbb{P}(B_i) > 0\}$: per $i\in I$, $\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G}) > 0$ q.c. Ovviamente, q.c. si ha

$$\sum_i \frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_{B_i} = \sum_{i\in I}\frac{\mathbb{P}(A\bigcap B_i\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i\,|\,\mathscr{G})}\mathbf{1}_{B_i}$$

Ora, per $i\in I$, indichiamo con $\mathbb{P}_i$ la probabilità condizionata a B_i e con $\mathbb{E}_i$ l'aspettazione sotto $\mathbb{P}_i$ ($\mathbb{E}_i(Y) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{B_i})$). Allora, per ogni $H = \bigcup_{i\in I_H} B_i \in$

$\mathscr{H}$ e $G \in \mathscr{G}$,

$$\mathbb{E}\Big(\sum_i \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B_i \,|\, \mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i \,|\, \mathscr{G})} \mathbf{1}_{B_i} \mathbf{1}_{G \bigcap H}\Big) \underbrace{=}_{\text{(MON)}} \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbb{E}\Big(\frac{\mathbb{P}(A \bigcap B_i \,|\, \mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i \,|\, \mathscr{G})} \mathbf{1}_{B_i} \mathbf{1}_G\Big)$$
$$= \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbb{E}_i\Big(\frac{\mathbb{P}(A \bigcap B_i \,|\, \mathscr{G})}{\mathbb{P}(B_i \,|\, \mathscr{G})} \mathbf{1}_G\Big) \underbrace{=}_{\textbf{a2)}} \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbb{E}_i\Big(\mathbb{P}_i(A \,|\, \mathscr{G}) \mathbf{1}_G\Big)$$
$$= \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbb{E}_i\Big(\mathbb{E}_i(\mathbf{1}_A \,|\, \mathscr{G}) \mathbf{1}_G\Big) = \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_G) = \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_G \mathbf{1}_{B_i})$$
$$\underbrace{=}_{\text{(MON)}} \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_G \sum_{i \in I \bigcap I_H} \mathbf{1}_{B_i}\Big) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_G \mathbf{1}_H) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{G \bigcap H})$$

da cui la tesi.

Esercizio 7. Se $Z = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}_1)$, allora $Z \in L^2$ e Z è $\mathscr{G}_2$ misurabile. Quindi

$$\mathbb{E}\Big((X - Z)^2\Big) \geq \inf_{W \in L^2(\mathscr{G}_2)} \mathbb{E}\Big((X - W)^2\Big) = \mathbb{E}\Big([X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}_2)]^2\Big),$$

da cui la tesi.

Esercizio 8. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) + \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))^2\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))^2\Big) + \mathbb{E}\Big((\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))^2\Big) \\
&\quad + 2\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))\Big) \\
&= a + b + c
\end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned}
a =& \ \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))^2\Big) \Big|\, \mathscr{G}\Big) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X \,|\, \mathscr{G})) \\
b =& \ \mathbb{E}\Big((\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\Big(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))\Big)^2\Big) \\
=& \ \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))
\end{aligned}$$

e dunque basta mostrare che $c = 0$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\frac{c}{2} &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))\underbrace{(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))}_{\text{è } \mathscr{G}\text{-misurabile}} \Big|\, \mathscr{G}\Big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big((\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X))\mathbb{E}\Big(X - \underbrace{\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})}_{\text{è } \mathscr{G}\text{-mis.}} \Big|\, \mathscr{G}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\Big((\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X)) \Big(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) - \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) \Big) \Big) = 0$$

Esercizio 9 a) Sia A un boreliano tale che $\mu_{\mathbb{P}}(A) = 0$. Allora

$$\mu_{\mathbb{Q}}(A) = \mathbb{Q}(Y \in A) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y \in A}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \mathbf{1}_{Y \in A}) = 0$$

perché $\mathbb{P}(Y \in A) = \mu_{\mathbb{P}}(A) = 0$ e quindi $X \mathbf{1}_{Y \in A} = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. Dunque, $\mu_{\mathbb{Q}} \ll \mu_{\mathbb{P}}$.

b) Osserviamo che per ogni boreliano A,

$$\mu_{\mathbb{Q}}(A) = \int_A \frac{d\mu_{\mathbb{Q}}}{d\mu_{\mathbb{P}}}(y)\, \mu_{\mathbb{P}}(dy) = \int \frac{d\mu_{\mathbb{Q}}}{d\mu_{\mathbb{P}}}(y)\, \mathbf{1}_{y \in A}\, \mu_{\mathbb{P}}(dy) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(h(Y) \mathbf{1}_{Y \in A})$$

dove si è posto $h(y) = \frac{d\mu_{\mathbb{Q}}}{d\mu_{\mathbb{P}}}(y)$. D'altra parte, si ha anche

$$\mu_{\mathbb{Q}}(A) = \mathbb{Q}(Y \in A) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y \in A}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \mathbf{1}_{Y \in A}).$$

Allora, per ogni boreliano A, dev'essere

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(h(Y) \mathbf{1}_{Y \in A}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \mathbf{1}_{Y \in A}).$$

Essendo $\{Y \in A\}$ un generico elemento di $\sigma(Y)$, (MC2) suggerisce che $h(Y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, Y)$. Perché questo sia vero, occorre che $h(Y)$ verifichi anche (MC1): $h(Y)$ è senz'altro $\sigma(Y)$ misurabile ed è anche $\mathbb{P}$-integrabile perché $h \geq 0$ e per quanto visto sopra

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(h(Y)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X) = 1.$$

Dunque, $h(y) = \mathbb{E}(X \,|\, Y = y)$.

Esercizio 10 a1) Sia $\Gamma = \{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) = 0\}$. Allora $\Gamma \in \mathscr{G}$ e da (MC2) si ottiene

$$\mathbb{E}(Z \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) = 0\}}) = \mathbb{E}(\, \mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) = 0\}}) = 0$$

Poiché $Z \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) = 0\}} \geq 0$ q.c., se la media è nulla allora $Z \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) = 0\}} = 0$ q.c.

a2) Osserviamo che poiché $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ è $\mathscr{G}$-misurabile, si ha

$$\mathbb{E}(YZ \,|\, \mathscr{G}) \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) > 0\}} = \mathbb{E}(YZ \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) > 0\}} \,|\, \mathscr{G})$$

quindi basta dimostrare che per ogni $\Gamma \in \mathscr{G}$ si ha

$$\mathbb{E}(YZ \mathbf{1}_{\Gamma}) = \mathbb{E}(YZ \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) > 0\}} \mathbf{1}_{\Gamma})$$

Infatti, ricordando che se $Z \geq 0$ q.c. allora $\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) \geq 0$ q.c., si ha

$$\mathbb{E}(YZ \mathbf{1}_{\Gamma}) = \mathbb{E}(YZ \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) > 0\}} \mathbf{1}_{\Gamma}) + \mathbb{E}(Y \underbrace{Z \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z \,|\, \mathscr{G}) = 0\}}}_{=0 \text{ q.c. da } \mathbf{a1)}} \mathbf{1}_{\Gamma})$$

$$= \mathbb{E}(YZ\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}\mathbf{1}_\Gamma)$$

b1) Dimostriamo che $\mathbb{Q}(\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G}) > 0) = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G}) > 0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}) = \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}})\\ &= \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(\underbrace{Z\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})=0\}}}_{=0 \text{ q.c. da } \mathbf{a1)}}) = 1.\end{aligned}$$

b2) Osserviamo che, da **b1)** e **a2)**, si ha

$$\frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}} \quad \mathbb{Q}\text{-q.c.}$$

quindi occorre dimostrare che

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y\,|\,\mathscr{G}) = \frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}} \quad \mathbb{Q}\text{-q.c.}$$

La $\mathscr{G}$-misurabilità è garantita. Basta quindi provare che per ogni $\Gamma \in \mathscr{G}$ si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}\mathbf{1}_\Gamma\Big)$$

e quindi che

$$\mathbb{E}(ZY\mathbf{1}_\Gamma) = \mathbb{E}\Big(Z\,\frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}\mathbf{1}_\Gamma\Big)$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(Z\,\frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}\mathbf{1}_\Gamma\Big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(Z\,\underbrace{\frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}}_{\text{è } \mathscr{G}\text{-misurabile}}\,\Big|\mathscr{G}\Big)\,\mathbf{1}_\Gamma\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\frac{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})}{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})}\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})\,\mathbf{1}_\Gamma\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\underbrace{\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G})\,\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(Z\,|\,\mathscr{G})>0\}}}_{=\mathbb{E}(YZ\,|\,\mathscr{G}) \text{ da } \mathbf{a2)}}\,\mathbf{1}_\Gamma\Big) = \mathbb{E}(YZ\,\mathbf{1}_\Gamma)\end{aligned}$$

da cui la tesi.

Esercizio 11. a) Posto Λ_{XY} e Λ_{ZY} la legge congiunta rispettivamente di (X,Y) e (Z,Y), si ha $\Lambda_{XY} = \Lambda_{ZY}$. Inoltre, per ogni $A \in \sigma(Y)$, $A = Y^{-1}(B)$ con B boreliano, si ha

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(h(X)\,|\,Y)\mathbf{1}_A\big) = \mathbb{E}(h(X)\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(h(X)\mathbf{1}_{Y\in B}) = \int h(x)\mathbf{1}_{y\in B}d\Lambda_{XY}(x,y)$$

$$= \int h(x)\mathbf{1}_{y\in B} d\Lambda_{ZY}(x,y) = \mathbb{E}(h(Z)\mathbf{1}_{Y\in B}) = \mathbb{E}(h(Z)\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(h(Z)\,|\,Y)\mathbf{1}_A\big)$$

Quindi,

$$\mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}(h(X)\,|\,Y) - \mathbb{E}(h(X)\,|\,Y)\big)\mathbf{1}_A\Big) = 0 \quad \text{per ogni } A \in \sigma(Y).$$

Poiché $\mathbb{E}(h(X)\,|\,Y) - \mathbb{E}(h(X)\,|\,Y)$ è $\sigma(Y)$-misurabile, si ottiene $\mathbb{E}(h(X)\,|\,Y) - \mathbb{E}(h(X)\,|\,Y) = 0$ q.c.

b) È facile vedere che $(T_1,T),\dots,(T_n,T)$ hanno la stessa legge. Usando **a)** si ha

$$\mathbb{E}(T_1\,|\,T) = \cdots = \mathbb{E}(T_n\,|\,T)$$

e quindi, per ogni $i = 1,\dots,n$,

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k\,|\,T) = n\mathbb{E}(T_i\,|\,T).$$

Ma

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k\,|\,T) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n T_k\,|\,T\Big) = \mathbb{E}(T\,|\,T) = T$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 12 a) Fissato A boreliano, sia $f(z,y) = \mathbf{1}_{z+\phi(y)\in A}$. f è ovviamente boreliana e poiché Z è indipendente da Y si ha $\mathbb{E}(f(Z,Y)\,|\,Y) = \mathbb{E}(f(Z,y))|_{y=Y}$ e quindi

$$\mathbb{E}(f(Z,Y)\,|\,Y=y) = \mathbb{E}(f(Z,y)) \ \text{ q.o. } y$$

da cui la tesi.

b) Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} X - AY \\ Y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{dove } B = \begin{pmatrix} I_{k\times k} & -A_{k\times p} \\ 0_{p\times k} & I_{p\times p} \end{pmatrix}$$

Dunque, $(X - AY, Y)$ è una trasformazione lineare di (X,Y) e quindi è ancora un vettore (congiuntamente) gaussiano. Ciò significa che $X - AY$ (a valori in $\mathbb{R}^k$) e Y (a valori in $\mathbb{R}^p$) sono indipendenti se e solo se le tutte le covarianze sono nulle, cioè se e solo se

$$\mathrm{Cov}(X_i - (AY)_i, Y_j) = 0 \text{ per ogni } i = 1,\dots,k \text{ e } j = 1,\dots,p. \qquad (1)$$

Questo consente di impostare un sistema lineare che consente la determinazione univoca di A. Infatti, da (1) si ha

$$0 = \mathrm{Cov}\Big(X_i - \sum_{\ell=1}^p A_{i\ell}Y_\ell, Y_j\Big) = \mathrm{Cov}(X_i,Y_j) - \sum_{\ell=1}^p A_{i\ell}\mathrm{Cov}(Y_\ell,Y_j)$$

$$= (C_{XY})_{ij} - \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}(C_Y)_{\ell j} = (C_{XY})_{ij} - (AC_Y)_{ij}$$

per ogni $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, p$. In forma compatta, otteniamo $C_{XY} - AC_Y = 0$, il che dà

$$A = C_{XY}C_Y^{-1}.$$

c) Presa A come nel punto precedente, possiamo scrivere

$$X = X - AY + AY \equiv Z + \phi(Y)$$

con $Z = X - AY$ e $\phi(Y) = Ay$. Poiché Z e Y sono indipendenti, da **a)** segue che la legge di X dato $Y = y$ è la legge di $Z + Ay$. Ora, Z è gaussiana e Ay è una traslazione deterministica, quindi la legge di $Z + Ay$ ha media e matrice di covarianza date rispettivamente da

$$\mu_{X|Y=y} = m_Z + Ay \quad \text{e } C_{X|Y=y} = C_Z$$

dove m_Z e C_Z denotano rispettivamente la media e la matrice di covarianza di Z. Andiamo quindi a calcolarle. Si ha

$$m_Z = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X - AY) = \mathbb{E}(X) - A\mathbb{E}(Y) = m_X - C_{XY}C_Y^{-1}m_Y$$

Sostituendo, si ottiene

$$\mu_{X|Y=y} = m_X + C_{XY}C_Y^{-1}(y - m_Y).$$

Passiamo a Σ_Y. Si ha, per $i, j = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned}(C_{X|Y=y})_{ij} &= \mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = \mathrm{Cov}\Big(X_i - \sum_{\ell_1=1}^{p} A_{i\ell_1}Y_{\ell_1}, X_j - \sum_{\ell_2=1}^{p} A_{j\ell_2}Y_{\ell_2}\Big)\\ &= \mathrm{Cov}(X_i, X_j) - \sum_{\ell_2=1}^{p} A_{j\ell_2}\mathrm{Cov}(X_i, Y_{\ell_2}) - \sum_{\ell_1=1}^{p} A_{i\ell_1}\mathrm{Cov}\Big(X_j, Y_{\ell_1})\\ &\quad + \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{p} A_{i\ell_1}A_{j\ell_2}\mathrm{Cov}(Y_{\ell_1}, Y_{\ell_2})\\ &= (C_X)_{ij} - (C_{XY}A^t)_{ij} - (AC_{YX})_{ij} + (AC_YA^t)_{ij}\end{aligned}$$

dove A^t denota la trasposta di A. Ricordando che C_Y è simmetrica e $C_{XY} = C_{YX}$, si ha $A^t = (C_{XY}C_Y^{-1})^t = (C_Y{}^t)^{-1}C_{XY}^t = C_Y^{-1}C_{YX}$. Quindi

$$\begin{aligned}C_{X|Y=y} &= C_X - C_{XY}C_Y^{-1}C_{YX} - C_{XY}C_Y^{-1}C_{YX} + C_{XY}C_Y^{-1}C_YC_Y^{-1}C_{YX}\\ &= C_X - C_{XY}C_Y^{-1}C_{YX}\end{aligned}$$

Ribadiamo che $C_{X|Y=y}$ non dipende da y: la conoscenza di $Y = y$ influenza solo la media della legge condizionale e non la matrice di covarianza.

d) Usiamo quanto visto nel punto **c)** perché $(X,Y) = (X, X+W)$ è una trasformazione lineare della v.a. gaussiana (X,W) e dunque è gaussiana. Qui, $k = p = 1$ e la legge di X dato che $Y = y$ è gaussiana di media

$$\mu_{X|Y=y} = m_X + C_{XY}C_Y^{-1}(y - m_Y) = m_X + \mathrm{Cov}(X,Y)\mathrm{Var}(Y)^{-1}(y - m_Y)$$

e varianza

$$\sigma^2_{X|Y=y} = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X,Y)\mathrm{Var}(Y)^{-1}\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Calcoliamo queste quantità:

$$m_Y = \mathbb{E}(X+W) = 0, \quad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+W) = 1+\sigma^2,$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, X+W) = \mathrm{Var}(X) = 1.$$

Quindi,

$$\mu_{X|Y=y} = \frac{y}{1+\sigma^2} \quad \text{e} \quad \sigma^2_{X|Y=y} = 1 - \frac{1}{1+\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}.$$

e) Usiamo ancora quanto visto nel punto **c)** perché $(X, Y_1, Y_2) = (X, X + W_1, X + W_2)$ è una trasformazione lineare della v.a. gaussiana (X, W_1, W_2) e dunque è gaussiana. Qui, $k = 1$ e $p = 2$ e la legge di X dato che $Y = y$ è gaussiana di media

$$\mu_{X|Y=y} = m_X + C_{XY}C_Y^{-1}(y - m_Y)$$

e varianza

$$\sigma^2_{X|Y=y} = \mathrm{Var}(X) - C_{XY}C_Y^{-1}C_{YX}.$$

Calcoliamo queste quantità. Si ha:

$$(m_Y)_1 = \mathbb{E}(X+W_1) = 0 = \mathbb{E}(X+W_2) = (m_Y)_2$$

e

$$C_{XY} = (\mathrm{Cov}(X,Y_1), \mathrm{Cov}(X,Y_2))$$
$$= (\mathrm{Cov}(X, X+W_1), \mathrm{Cov}(X, X+W_2)) = (1,1) = C^t_{YX}$$

Inoltre,

$$C_Y = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) \\ \mathrm{Cov}(Y_2,Y_1) & \mathrm{Var}(Y_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X+W_1) & \mathrm{Cov}(X+W_1, X+W_2) \\ \mathrm{Cov}(X+W_2, X+W_1) & \mathrm{Var}(X+W_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & 1 \\ 1 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix}$$

da cui si trova facilmente che

$$C_Y^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(2+\sigma^2)} \begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & -1 \\ -1 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Sostituendo, si ottiene

$$\mu_{X|Y=y} = (1,1) \cdot \frac{1}{\sigma^2(2+\sigma^2)} \begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & -1 \\ -1 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{y_1+y_2}{2+\sigma^2}$$

$$\sigma^2_{X|Y=y} = 1-(1,1) \cdot \frac{1}{\sigma^2(2+\sigma^2)} \begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & -1 \\ -1 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2+\sigma^2}.$$

Si noti che in questo secondo caso la varianza di X dato che $Y = y$ è senz'altro più piccola che nell'esempio precedente, in cui veniva uguale a $\sigma^2/(1+\sigma^2)$. In questo senso allora sembra vero che più osservazioni diano una stima migliore.

Esercizio 13. **a)** Z assume due valori, 0 o 1, quindi $\mathscr{C} = \{C_0, C_1\}$ dove

$$C_0 = Z^{-1}(\{0\}) \quad \text{e} \quad C_1 = Z^{-1}(\{1\}).$$

Ora, se la σ-algebra condizionante è generata da una partizione finita o al più numerabile di Ω allora la media condizionale è costante sugli elementi della partizione:

$$\mathbb{E}(W \mid Z) = \alpha_0 \mathbf{1}_{\{Z=0\}} + \alpha_1 \mathbf{1}_{\{Z=1\}} \text{ con } \alpha_i = \frac{\mathbb{E}(W\mathbf{1}_{Z=i})}{\mathbb{P}(Z=i)}, i = 0, 1.$$

dove si ponga, ad esempio, $\alpha_i := 0$ se $\mathbb{P}(C_i) = 0$. Per la verifica, si rimanda all'Esercizio 1.

b) Scelta $W = X$, si ha

$$\alpha_1 = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Z=1\}})}{\mathbb{P}(Z=1)} = 0$$

perché $X\mathbf{1}_{\{Z=1\}} = X\mathbf{1}_{\{X=0,Y=0\}} = 0$ q.c. Poi,

$$\alpha_0 = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Z=0\}})}{\mathbb{P}(Z=0)} = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X+Y>0\}})}{\mathbb{P}(X+Y>0)}.$$

Ma, $X\mathbf{1}_{\{X+Y>0\}} = X - X\mathbf{1}_{\{X+Y=0\}} = X$ q.c. e quindi $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X+Y>0\}}) = \mathbb{E}(X) = p$. Poi, $\mathbb{P}(X+Y>0) = 1-\mathbb{P}(X+Y=0) = 1-\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1-\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = 1-(1-p)^2 = p(2-p)$. Quindi,

$$\alpha_0 = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}.$$

Infine, per simmetria dev'essere $\mathbb{E}(Y \mid Z) = \mathbb{E}(X \mid Z)$, da cui segue che

$$\mathbb{E}(X \mid Z) = \mathbb{E}(Y \mid Z) = \frac{1}{2-p}\,\mathbf{1}_{\{Z=0\}}.$$

Essendo uguali, $\mathbb{E}(X \mid Z)$ e $\mathbb{E}(Y \mid Z)$ non possono certo essere indipendenti.
c) Poniamo $W_k = \mathbb{E}(X_k \mid Z_k) = \frac{1}{2-p}\,\mathbf{1}_{\{Z_k=0\}}$. Essendo le $Z_k = X_k + Y_k$ i.i.d., le W_k sono anch'esse i.i.d. Ora, la presenza di $\sqrt{n}$ suggerisce (o quantomeno dovrebbe suggerire) il TLC. Calcoliamo media e varianza di W_k:

$$\begin{gathered}
\mathbb{E}(W_k) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_k \,|\, \mathscr{G}_k)\big) = \mathbb{E}(X_k) = p =: \mu \\
\mathbb{E}(W_k^2) = \mathbb{E}\big(\frac{1}{(2-p)^2}\,\mathbf{1}_{Z_k=0}\big) = \frac{1}{(2-p)^2}\,p(2-p) = \frac{p}{2-p} \\
\text{quindi } \mathrm{Var}(W_k) = \frac{p}{2-p} - p^2 =: \sigma^2
\end{gathered}$$

Ora,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k \,|\, \mathscr{G}_k\big) - \sqrt{n}\,p = \frac{\sum_{k=1}^{n}(W_k - \mu)}{\sqrt{n}}$$

e il TLC dà

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k \,|\, \mathscr{G}_k\big) - \sqrt{n}\,p \xrightarrow{w} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

Esercizio 14. Osserviamo che 1) $S_n = S_{n-1} + X_n$; 2) S_{n-1} è $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabile ed ovviamente $\sigma(S_{n-1})$-misurabile; 3) X_n è indipendente da $\mathscr{F}_{n-1}$ e da S_{n-1}. Allora,

$$\mathbb{E}(f(S_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(f(S_{n-1} + X_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(f(\xi + X_n))\big|_{\xi = S_{n-1}}$$

e

$$\mathbb{E}(f(S_n) \,|\, S_{n-1}) = \mathbb{E}(f(S_{n-1} + X_n) \,|\, S_{n-1}) = \mathbb{E}(f(\xi + X_n))\big|_{\xi = S_{n-1}}$$

da cui la tesi.