Esercitazione X
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: convergenza e TLC.

Esercizio 1. Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d. di legge Exp(1). Sia

$$G_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

a) Scrivere la funzione caratteristica[1] φ_n di G_n e dimostrare che esiste $\psi \geq 0$, $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, tale che $|\varphi_n(\theta)| \leq \psi(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e n grande. Dedurre che G_n ha densità f_n data da

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x} \varphi_n(\theta)\, d\theta.$$

b) Usando il punto **a)** ed il TLC[2], dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x} e^{-\theta^2/2}\, d\theta.$$

c) Scrivere esplicitamente[3] la densità f_n di G_n e usando il punto **b)**, in particolare per $x = 0$, dedurre la formula di Stirling:

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \text{ grande}.$$

Esercizio 2. Un dado viene lanciato 900 volte e sia X il numero di volte in cui è uscito il 6.

a) Se il dado è equilibrato, quanto vale $\mathbb{P}(X > 180)$?

b) Supponiamo di sapere dell'esistenza di una partita di dadi truccati che producono il 6 con probabilità 2/9. Per decidere se il dado è truccato, viene usata la seguente procedura: il dado viene lanciato 900 volte e lo si considera truccato se il 6 esce più di 180 volte. Qual è la probabilità che un dado truccato sia effettivamente individuato?

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. reali, i.i.d., di media 0 e varianza 4.

[1] Ricordiamo che se $X \sim$Exp(λ) allora la sua funzione caratteristica è data da $\varphi_X(t) = \lambda/(\lambda - i\theta)$.

[2] Ricordiamo che se $X \sim$Exp(λ) allora $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = \mathrm{Var}(X)$.

[3] Ricordiamo che la somma di n v.a. i.i.d. di legge Exp(λ) dà una v.a. $\Gamma(n, \lambda)$, di densità $p(\xi) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, \xi^{n-1} e^{-\lambda\xi} \mathbf{1}_{\xi>0}$.

a) Approssimare, per n grande, $\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k > 2\Big)$.

b) Supponendo che esista $\mathbb{E}[X_1^4]$, studiare la convergenza in legge, in probabilità, q.c. e in media della successione $\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right\}_n$.

Esercizio 4. **a)** Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. gaussiane, con

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$$

Mostrare che $\{X_n\}_n$ converge in legge ad una v.a. gaussiana, e precisarne media e varianza.

b) Sia $\{Z_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., di legge $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$, e sia $\{X_n\}_n$ la successione definita per ricorrenza nel seguente modo[4]

$$X_0 = x \in \mathbb{R}, \qquad X_{n+1} = \alpha\, X_n + Z_n,$$

con $|\alpha| < 1$. Qual è la legge[5] di X_1? E di X_2? Mostrare che per $n \to \infty$ la successione $\{X_n\}_n$ converge in legge. Se $\sigma^2 = 1$ e $\alpha = 1/2$, quanto vale la probabilità che X_n disti dall'origine per meno di 1 quando n è grande?

Esercizio 5. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., con media 0 e varianza σ^2. Studiare la convergenza in legge, per $n \to \infty$, di $Z_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2/n$.

Esercizio 6. Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., ciascuna con densità

$$p(x) = \frac{1}{2x}\,\mathbf{1}_{e^{-1}<x<e}.$$

Posto $Y_n = \Big(\prod_{k=1}^n X_k\Big)^{1/n}$ e di $Z_n = \Big(\prod_{k=1}^n X_k\Big)^{1/\sqrt{n}}$, dimostrare che per ogni $g \in C_b$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Y_n)) = g(1) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(e^z)}{\sqrt{2\pi/3}}\, e^{-3\,z^2/2}\, dz.$$

[4] Le v.a. $X_1, X_2, \ldots$ si possono interpretare come le posizioni successive di un mobile che ad ogni istante si sposta dalla posizione corrente X_n in $\alpha\, X_n$ ma subisce anche una perturbazione (aleatoria) Z_n.

[5] Ricordiamo che una combinazione lineare di v.a. gaussiane indipendenti è ancora una v.a. gaussiana.

Soluzioni

Esercizio 1 a) Si ha

$$\varphi_n(\theta) = \varphi_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(\theta) = \varphi_{S_n-n}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big) = e^{i(-n)\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\varphi_{S_n}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big)$$
$$= e^{-i\theta\sqrt{n}}\Big(\varphi_{X_1}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^n = e^{-i\theta\sqrt{n}}\Big(1-\frac{i\theta}{\sqrt{n}}\Big)^{-n}.$$

In particolare,

$$|\varphi_n(\theta)| = \Big|1-\frac{i\theta}{\sqrt{n}}\Big|^{-n} = \Big(1+\frac{\theta^2}{n}\Big)^{-n/2}.$$

Ora, poiché $(1+1/n)^{-n} \downarrow e^{-1}$ per $n \to \infty$, otteniamo

$$|\varphi_n(\theta)| \le \Big(1+\frac{\theta^2}{2}\Big)^{-1} =: \psi(\theta), \quad n \ge 2$$

e $\psi \ge 0$, ψ integrabile su $\mathbb{R}$. Ciò significa che $\varphi_n \in L^1$ e usando il teorema di inversione (per densità), si ha che $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ ha densità f_n data da

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x}\varphi_n(\theta)d\theta.$$

b) Per il TLC, $G_n \to Z$ in legge, per $n \to \infty$, con $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\theta) = e^{-\theta^2/2}.$$

Poi, dal punto **a)** φ_n è uniformemente dominata, in valore assoluto, da una funzione di L^1, usando DOM si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x}\varphi_n(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x-\theta^2/2}\,d\theta$$

da cui segue immediatamente la tesi.

c) Si ha $G_n = g(S_n)$, dove $g(x) = (x-n)/\sqrt{n}$ è invertibile con inversa $h(y) = y\sqrt{n}+n$. Detta p_n la densità di S_n, si ha

$$p_n(\xi) = \frac{1}{(n-1)!}\,\xi^{n-1}e^{-\xi}\mathbf{1}_{\xi>0}.$$

Usando il TCV, si ha:

$$f_n(x) = p_n(h(x))h'(x) = \frac{1}{(n-1)!}\,(x\sqrt{n}+n)^{n-1}e^{-(x\sqrt{n}+n)}\mathbf{1}_{x\sqrt{n}+n>0}\cdot\sqrt{n}$$

e per $x = 0$, si ottiene

$$f_n(0) = \frac{1}{(n-1)!}\, n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} = \frac{1}{n!}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Ora, poiché abbiamo visto che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta^2/2}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

alla fine otteniamo, per n grande,

$$\frac{1}{n!}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

che è la formula di Stirling.

Esercizio 2. Se "successo"="esce il 6", X è il numero di successi su 900 prove, quindi $X \sim \mathrm{Bi}(900, p)$ ed inoltre X si può rappresentare in legge come $\sum_{k=1}^{900} X_k$, con X_k indipendenti e bernoulliane $\mathrm{Be}(p)$. Quindi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 180) &= \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{k=1}^{900} X_k - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}} > \frac{180 - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}\Big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\Big(Z_{900} \le \frac{180 - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}\Big)\end{aligned}$$

avendo posto $Z_{900} = \frac{\sum_{k=1}^{900} X_k - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}$. Usando il TLC,

$$\mathbb{P}(X > 180) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{180 - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}\Big) \tag{1}$$

dove $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi} dt$ denota la f.d. di una legge $\mathrm{N}(0,1)$. Si noti che tale approssimazione è valida per ogni legge $\mathrm{Bi}(n,p)$, con n grande, ed è detta "approssimazione gaussiana" della legge binomiale.

a) In questo caso $p = 1/6$, quindi $\mathbb{E}(X_1) = 1/6$ e $\mathrm{Var}(X_1) = 5/6$. Allora, da (1),

$$\mathbb{P}(X > 180) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{180 - 900/6}{\sqrt{900 \cdot 5/36}}\Big) = 1 - \Phi(2.68) = 1 - 0.9963 = 0.0037.$$

b) Se il dado è truccato, $p = 2/9$. La procedura scelta individua un dado truccato se $X > 180$, quindi la probabilità con la quale un dado truccato è effettivamente individuato è data da (1) con $X \sim \mathrm{Bi}(900, 2/9)$, o equivalentemente $X_k \sim \mathrm{Be}(2/9)$. In tal caso, $\mathbb{E}(X_k) = 2/9$ e $\mathrm{Var}(X_k) = 14/81$, e la probabilità richiesta è

$$p^* \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{180 - 900 \cdot 2/9}{\sqrt{900 \cdot 14/81}}\Big) = 1 - \Phi(-1.60) = \Phi(1.60) = 0.9452.$$

Esercizio 3. **a)** $\{\sum_{k=1}^{n^2} X_k/n\}_n$ è una sottosuccessione di $\{\sum_{k=1}^{m}(X_k - \mathbb{E}(X_k))/\sqrt{m}\}_m$, che per il TLC converge in legge ad una v.a. $\mathrm{N}(0, \mathrm{Var}(X_k)) = \mathrm{N}(0,4)$. Allora, il limite richiesto esiste e

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k > 2\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(1 - \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k \le 2\Big)\Big) = 1 - \mathbb{P}(Z \le 2)$$

dove $Z \sim \mathrm{N}(0,4)$. Ora, si ha $Z/2 \sim \mathrm{N}(0,1)$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k > 2\Big) = 1 - \mathbb{P}(Z \le 2) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

b) Posto $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2/n$ per la LGN si ha che $Y_n \to \mathbb{E}(X_1^2) = 4$ q.c. per $n \to \infty$. Poiché $Z_n := \sum_{k=1}^{n} X_k^2/n^2 = Y_n/n$, allora $Z_n \to 0$ q.c., quindi in probabilità e in legge. Studiamo la convergenza in media, ovviamente a 0:

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{4}{n} \to 0, \qquad \text{se } n \to \infty$$

quindi Z_n converge a 0 anche in media.

Esercizio 4. **a)** Studiamo la convergenza delle funzioni caratteristiche:

$$\varphi_{X_n}(\theta) = e^{i\theta\mu_n - \sigma_n^2\theta^2/2} \to e^{i\theta\mu - \sigma^2\theta^2/2} =: g(\theta), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Ora, $g(\theta) = \varphi_X(\theta)$, con $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Usando il teorema di convergenza di Lévy, possiamo concludere che $X_n \to X$ in legge.

b) $X_1 = \alpha\, x + Z_0$, con $Z_0 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, quindi $X_1 \sim \mathrm{N}(\alpha\, x, \sigma^2)$. Poi, $X_2 = \alpha\, X_1 + Z_1$, dove X_1 e Z_1 sono indipendenti e gaussiane. Ma allora X_2 è ancora gaussiana, di media $\alpha\mathbb{E}(X_1) = \alpha^2\, x$ e varianza $\alpha^2\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Z_1) = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2$. L'idea quindi è che, per $n \ge 1$,

$$X_{n+1} \sim \mathrm{N}(\alpha^{n+1}\, x, \sigma^2(1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{2n})).$$

Infatti,

$$\begin{aligned} X_{n+1} = \alpha\, X_n + Z_n &= \alpha(\alpha\, X_{n-1} + Z_{n-1}) + Z_n = \alpha^2\, X_{n-1} + \alpha\, Z_{n-1} + Z_n \\ &= \alpha^2(\alpha\, X_{n-2} + Z_{n-2}) + \alpha\, Z_{n-1} + Z_n \\ &= \cdots = \alpha^{n+1}\, X_0 + \alpha^n Z_0 + \alpha^{n-1} Z_1 + \cdots + \alpha\, Z_{n-1} + Z_n \\ &= \alpha^{n+1}\, x + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, Z_{n-k}. \end{aligned}$$

Ora, le Z_j sono indipendenti di legge $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$, quindi $\sum_{k=0}^n \alpha^k\, Z_{n-k}$ è una gaussiana di media nulla e varianza $\sigma^2 \sum_{k=0}^n \alpha^{2k}$. Poi, $\alpha^{n+1}\, x$ è solo una traslazione, quindi (verificare!) $X_{n+1} \sim \mathrm{N}(\mu_{n+1}, \sigma_{n+1}^2)$, dove

$$\mu_{n+1} = \alpha^{n+1}\, x \qquad\qquad \sigma_{n+1}^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^n \alpha^{2k}.$$

Se $|\alpha| < 1$, $\mu_n \to 0$ e $\sigma_n^2 \to \sigma^2/(1-\alpha^2)$ per $n \to \infty$. Usando **a)**, possiamo dire che X_n converge in legge ad una v.a. gaussiana, di media 0 e varianza $\sigma^2/(1-\alpha^2)$. La probabilità richiesta è $\mathbb{P}(|X_n| < 1)$, e per n grande si puù stimare come segue: detta X una v.a. di legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2/(1-\alpha^2))$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n| < 1) \simeq \mathbb{P}(|X| < 1) &= \mathbb{P}\Big(\frac{|X|}{\sqrt{\sigma^2/(1-\alpha^2)}} < \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/(1-\alpha^2)}}\Big)\\ &= \Phi\Big(\sqrt{1-\alpha^2}/\sigma\Big) - \Phi\Big(-\sqrt{1-\alpha^2}/\sigma\Big) = 2\Phi\Big(\sqrt{1-\alpha^2}/\sigma\Big) - 1\end{aligned}$$

Se $\alpha = 1/2$ e $\sigma = 1$, si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| < 1) \simeq 2\Phi\Big(\sqrt{3}/2\Big) - 1 = 2\Phi(0.866) - 1 = 2 \cdot 0.806 - 1 = 0.612.$$

Esercizio 5. $Z_n = f(Y_n)$, con $f(y) = y^2$ e $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$. Ora, usando il TLC, $Y_n \to Y$ in legge, con $Y \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$. Poiché f è continua, si ottiene $Z_n \to f(Y) = Y^2$ in legge: Z_n converge in legge ad una v.a. che è il quadrato di una $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ (se ne calcoli la densità!).

Esercizio 6 Poniamo $\widehat{Y}_n = \log Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log X_k$. Le v.a. $\log X_k$ sono i.i.d. Calcoliamo media e varianza di $\log X_k$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\log X_k) &= \int_{e^{-1}}^{e} \frac{\log x}{2x}\, dx = \frac{(\log x)^2}{4}\Big|_{e^{-1}}^{e} = 0\\ \mathbb{E}\big((\log X_k)^2\big) &= \int_{e^{-1}}^{e} \frac{(\log x)^2}{2x}\, dx = \frac{(\log x)^3}{6}\Big|_{e^{-1}}^{e} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{Var}(\log X_k) = 1/3$. Allora, usando la LFGN,

$$\widehat{Y}_n \to \mathbb{E}(X_1) = 0 \quad \text{q.c.}$$

Ora, $Y_n = f(\widehat{Y}_n)$, con $f(x) = e^x$ continua, quindi $Y_n \to f(0) = 1$ q.c. Infine, la convergenza q.c. implica la convergenza in legge, quindi per ogni $g \in C_b$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Y_n)) = \mathbb{E}(g(1)) = g(1).$$

Oppure, basta osservare che $W_n := g(Y_n) = g \circ f(\widehat{Z}_n) \to g \circ f(0) = g(1) =: W$ q.c. perché $g \circ f$ è continua, e $|W_n| \le M$, con $M > 0$, perché $g \circ f \in C_b$. Allora usando DOM segue che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W) = g(1)$.

Per Z_n procediamo analogamente. Poniamo $\widehat{Z}_n = \log Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \log X_k$. Le v.a. $\log X_k$ sono i.i.d. con media nulla e varianza 1/3: usando il TLC,

$$\widehat{Z}_n \to Z \quad \text{in legge, con } Z \sim \mathrm{N}(0, 1/3)$$

Ora, $Z_n = f(\widehat{Z}_n)$, con $f(x) = e^x$ continua, quindi presa $g \in C_b$, si ha che $g(Z_n) = g \circ f(\widehat{Z}_n)$ e $g \circ f \in C_b$. Allora,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g \circ f(\widehat{Z}_n)) \\ = \mathbb{E}(g \circ f(Z)) = \mathbb{E}(g(e^Z)) &= \int_{\mathbb{R}} g(e^z) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi/3}} \, e^{-3\,z^2/2} \, dz. \end{aligned}$$

Infine, osserviamo che i passaggi al log che sono stati fatti sono giustificati dal fatto che le X_k sono v.a. positive q.c.