I Esonero
Complementi di Probabilità
a.a. 2008/2009, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. di legge Exp(2). Sia $\mathbb{Q}$ la misura su $(\Omega, \mathscr{F})$ definita da

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(2X\mathbf{1}_A), A \in \mathscr{F}.$$

a) Verificare che $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità.

b) Dire se $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e/o $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e in caso affermativo scrivere $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ e/o $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

c) Per quali valori di p si ha $Y = e^X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$?

d) Dimostrare che se Z è indipendente da X in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ allora la legge di Z in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ coincide con la legge di Z in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Esercizio 2. Per $n \geq 1$, siano p_n e q_n numeri non negativi tali che $p_n + q_n \leq 1$ e sia

$$\mu_n = p_n\delta_{\{n\}} + q_n\delta_{\{1\}} + (1 - p_n - q_n)\delta_{\{0\}}$$

dove $\delta_{\{c\}}$ denota la massa di Dirac in c.

a) Verificare che $\{\mu_n\}_n$ è una successione di misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ e dimostrare che $\{\mu_n\}_n$ è *tight* se e solo se $p_n \to 0$ per $n \to \infty$.

b) Su un opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tale che X_n ha legge μ_n per ogni n. Supponiamo che $p_n = 1/n^4$ e $q_n = 1/n^2$. Studiare la convergenza in legge, in probabilità, in L^p e q.c. della successione $\{X_n\}_n$.

Esercizio 3. Sia $\{Z_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., con legge di Cauchy[1]. Per $n \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, siano

$$S_n = Z_1 + \cdots + Z_n \quad \text{e} \quad X_n = \frac{1}{n^\alpha} S_n.$$

a) Calcolare la funzione caratteristica di S_n e provare che $\frac{1}{n} S_n = n^{\alpha-1} X_n$ è una v.a. di Cauchy.

b) Studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Supponendo $\alpha = 3$, studiare la convergenza in probabilità, q.c. e in L^p di $\{X_n\}_n$.

[1] Ricordiamo che la legge di Cauchy ha densità e funzione caratteristica date rispettivamente da

$$p_Y(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, x \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \varphi_Y(\theta) = \exp(-|\theta|).$$

II Esonero
Complementi di Probabilità
a.a. 2008/2009, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano X e Y due v.a. i.i.d. bernoulliane di parametro $p \in (0,1)$. Sia $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$ e $\mathscr{G} = \sigma(Z)$.

a) Scrivere la partizione (finita) $\mathscr{C} = \{C_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{F}$ di Ω tale che $\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{C})$. Verificare che per $W \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, la v.a. $\mathbb{E}(W \mid \mathscr{G})$ è q.c. costante su ciascun elemento C_i della partizione $\mathscr{C}$ (e scrivere tali costanti).

b) Usando **a)**, calcolare $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ e $\mathbb{E}(Y \mid \mathscr{G})$ e dire se si tratta di v.a. indipendenti.

c) Siano $\{X_n\}_n$ e $\{Y_n\}_n$ due successioni indipendenti di v.a. i.i.d. bernoulliane di parametro $p \in (0,1)$. Discutere la convergenza debole, per $n \to \infty$, di

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(X_k \mid \mathscr{G}_k\big) - \sqrt{n}\, p,$$

dove $\mathscr{G}_k = \sigma(Z_k)$ e $Z_k = \mathbf{1}_{\{X_k+Y_k=0\}}$.

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. di media μ. Definiamo $X_0 = Y_0$ e per $n \geq 1$, $X_n = X_{n-1} + Y_n f_n(X_0, \dots, X_{n-1})$, dove, per ogni $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è boreliana, non negativa e limitata. Poniamo $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$.

a) Provare che il processo $X = \{X_n\}_n$ è integrabile e $\mathscr{F}_n$-adattato. Dire se è una $\mathscr{F}_n$-martingala o supermartingala o submartingala.

Supponiamo d'ora in poi che, per $p \in (0, 1/2)$,

$$\mathbb{P}(Y_0 = +1) = p = \mathbb{P}(Y_0 = -1), \quad \mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1 - 2p$$

e che $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_n(x) \leq 1/n^2$. Definiamo $\tau = \inf\{n \geq 0 \,:\, Y_n \neq 0\}$,

b) Provare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto q.c. finito.

c) Dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $\sup_n |X_{\tau\wedge n}| < M$ q.c. e calcolare quindi $\mathbb{E}(X_\tau)$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia data una filtrazione $\{\mathscr{F}_n\}_n$. Sia $\mathbb{Q}$ una misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ tale che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Per ogni n fissato, siano $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{Q}_n$ la restrizione rispettivamente di $\mathbb{P}$ e di $\mathbb{Q}$ a $\mathscr{F}_n$ ($\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n : \mathscr{F}_n \to [0,1]$, $\mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{Q}(A)$ per ogni $A \in \mathscr{F}_n$).

a) Dimostrare che, per ogni n, $\mathbb{Q}_n \ll \mathbb{P}_n$

b) Posto $X_n = \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n}$ e $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, dimostrare che $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)$ e che $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala che converge q.c. per $n \to \infty$.

[Sugg.: Osservare che $(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n) \equiv (\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P})$ e $(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{Q}_n) \equiv (\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{Q})$ ed inoltre, su $\mathscr{F}_n$ si ha $\mathbb{P}_n \equiv \mathbb{P}_{n+1}$ e $\mathbb{Q}_n \equiv \mathbb{Q}_{n+1}$.]

Esame scritto - I Sessione, I Appello
Complementi di Probabilità
a.a. 2008/2009, L. Caramellino

[Per il recupero del I esonero: Esercizi 1 e 2.
Per la prova scritta: Esercizi 1, 2 e 3.]

Esercizio 1. Sia dato $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e per $A \in \mathscr{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_A e^{-\frac{1}{4}x^2} dx.$$

Sia $X(\omega) = \omega$ e $\mathbb{Q}$ la misura su $(\Omega, \mathscr{F})$ definita da $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{X-1}$.

a) Verificare che $X \sim \mathrm{N}(0, 2)$ e che[2] $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$.

b) Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano Y_1 e Y_2 v.a. indipendenti tra loro e con X. Dimostrare che Y_1 e Y_2 rimangono indipendenti anche in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$. Come cambia la legge congiunta?

c) Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. e indipendente da X. Supponiamo $Y_1 \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e che $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2$. Discutere la convergenza debole, per $n \to \infty$, di $\{\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n Y_k\}_n$ nello spazio $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$, al variare di $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. di legge[3] $\mathrm{Po}(n^2)$. Studiare la convergenza debole, in probabilità, in L^2 e q.c. della successione $\{\frac{1}{n^2} X_n\}_n$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sia $\{Y_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $\mathbb{P}(Y_k = +1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(Y_k = 0) = 1/2$. Per $n = 0, 1, \ldots$, siano $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$ e $X_n = \prod_{k=0}^n (Y_k + 1)$. Definiamo infine $\tau = \inf\{k \geq 0 \,:\, Y_k = -1\}$.

a) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

b) Provare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto q.c. finito e che $X_\tau = 0$ q.c.

c) Calcolare $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n})$ per ogni n.

d) Dire se, per $n \to \infty$, $\{X_{\tau \wedge n}\}_n$ converge q.c. e/o in L^1 e/o in L^2.

[2] Ricordiamo che se $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, allora $\mathbb{E}(e^{\lambda Z}) = e^{\lambda^2/2}$.

[3] Ricordiamo che se $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ allora X è a valori in $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$ Qualora dovesse essere utile, ricordiamo anche che: $X \in L^p$ per ogni $p \geq 1$; $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$; la funzione caratteristica è $\varphi(\theta) = \exp(\lambda(e^{i\theta} - 1))$.

Esame scritto - I Sessione, II Appello
Complementi di Probabilità
a.a. 2008/2009, L. Caramellino

Esercizio 1. Siano Ω uno spazio astratto, $\mathscr{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una partizione al più numerabile di Ω e $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$.

a) Dimostrare che ogni misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $(\Omega, \mathscr{F})$ è determinata da $\{\mathbb{P}(C_i)\}_{i\in I}$.

b) Siano $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ misure di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ tali che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e sia $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

- **b1)** Dimostrare che X è costante su ciascun elemento C_i della partizione.
- **b2)** Scrivere X.

c) Supponiamo che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) < \infty$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i > \sqrt{n}\Big)$$

essendo $\{X_n\}_n$ una successione di copie indipendenti in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ di X.

Esercizio 2. Per ogni n, siano Z_n e Y_n due v.a. indipendenti tali che $Z_n \sim \mathrm{Be}(p_n)$, con $p_n \in (0,1)$, e $Y_n \sim \mathrm{Exp}(n)$. Si definisca

$$X_n = Y_n \mathbf{1}_{\{Z_n=0\}} - Y_n \mathbf{1}_{\{Z_n=1\}}.$$

a) Scrivere la funzione caratteristica di X_n e discutere la convergenza in legge e/o in probabilità di X_n quando $n \to \infty$.

b) Studiare la convergenza q.c. e in L^p di X_n quando $n \to \infty$.

[Nota: potrebbe essere utile ricordare che se W $\sim$Exp(λ) allora: 1) $\varphi_W(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$; 2) per ogni $\mu > 0$, μW $\sim$Exp$\big(\lambda/\mu\big)$.]

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia data una filtrazione $\{\mathscr{F}_n\}_n$ e sia $\{M_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-martingala limitata in L^4 (cioè, esiste una costante positiva L tale che $\sup_n \mathbb{E}(|M_n|^4) \le L$). Definiamo $X_0 = 0$ e per $n \ge 1$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_{k-1}(M_k - M_{k-1})}{k}.$$

a) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala. È anche di quadrato integrabile?

b) Dire se, per $n \to \infty$, $\{X_n\}_n$ converge q.c. e/o in L^1.

I Esonero
Complementi di Probabilità
A.A. 2009/2010, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano X e Y due v.a. i.i.d. di legge Exp(1). Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni boreliane, non negative, e sia $\mathbb{Q}$ una misura su $(\Omega, \mathscr{F})$ definita da

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z, \quad \text{con } Z = c\, e^{-f(X)-g(Y)}, \quad c > 0.$$

a) Verificare che $\mathbb{Q}$ è effettivamente una misura su $(\Omega, \mathscr{F})$. Determinare $c = c_{f,g}$ affinché $\mathbb{Q}$ sia una misura di probabilità.

D'ora in poi supporremo $c = c_{f,g}$.

b) Per quali valori di $p \geq 1$ si ha $XY \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$? Scrivere poi la legge (congiunta) di (X, Y) sotto $\mathbb{Q}$. X e Y rimangono i.i.d. sotto $\mathbb{Q}$?

c) Sia $\{(X_n, Y_n)\}_n$ una successione di copie indipendenti di (X, Y) in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Posto $U_n = e^{-f(X_n)-g(Y_n)}$, dimostrare che si ha

$$\frac{c_{f,g}}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (\mathbb{P}\text{-})\text{q.c.}$$

Tale convergenza è vera anche $\mathbb{Q}$-q.c.?

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, per $n \geq 1$, sia Y_n una v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}\big(m, \frac{1}{n}C\big)$, con $m \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ semidefinita positiva. Sia poi $Z_n \sim$Be(p_n), con $p_n \in (0, 1)$. Supponiamo che, per ogni n, Y_n e Z_n siano indipendenti e definiamo

$$X_n = (2Z_n - 1)Y_n, \quad n \geq 1.$$

Supponiamo infine che $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in (0, 1)$

a) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ converge in legge e determinare la legge limite.

b) Nell'ipotesi $m = 0$, studiare[4] la convergenza in probabilità, in L^p, q.c. di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 3. Per $n \geq 1$, siano $\alpha_n, \beta_n \in (0, 1)$, con $\alpha_n + \beta_n \leq 1$, ρ_n la legge[5] Exp$(1/n)$ e ν_n la legge Exp(n). Definiamo $\mu_n = \alpha_n \rho_n + \beta_n \nu_n + (1 - \alpha_n - \beta_n)\delta_{\{1\}}$.

a) Dimostrare che $\{\mu_n\}_n$ è tight se e solo se $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

b) Nell'ipotesi $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, è vero che esiste $\mu \in$Prob$(\mathbb{R})$ tale che $\mu_n \stackrel{w}{\to} \mu$?

[4] Potrebbe essere utile ricordare che: 1) se A è una matrice $d \times d$ allora $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ (dove per $A \in \mathrm{Mat}(d \times d)$, $\|A\| = \sup_{|\xi|=1} |A\xi|$ è una norma); 2) fissati $d \geq 1$ e $p \geq 1$, esiste una costante $M_{d,p} > 0$ tale che $|x|^p \equiv \big(\sum_{k=1}^d |x_k|^2\big)^{p/2} \leq M_{d,p} \sum_{k=1}^d |x_k|^p$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

[5] Potrebbe essere utile ricordare che se $U \sim$ Exp(λ) allora 1) $\mathbb{P}(U > u) = e^{-\lambda u}$, $u > 0$, e 2) $\varphi_U(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - i\theta}$.

II Esonero
Complementi di Probabilità
A.A. 2009/2010, L. Caramellino

Esercizio 1. Siano X, Y, Z v.a. reali tali che $\in L^1$ e $Y = Z$ q.c. Dimostrare che $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid Z)$ q.c.

[Sugg. a) verificare che $\mathbb{E}(X \mid Y) - \mathbb{E}(X \mid Z)$ è $\sigma(Y, Z)$-misurabile; b) dimostrare che per ogni $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ si ha $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid Y)\mathbf{1}_{(Y,Z)\in\Gamma}\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid Z)\mathbf{1}_{(Y,Z)\in\Gamma}\big)$; c) dedurre che $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid Z)$ q.c.]

Esercizio 2. Sia $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $\mathbb{P}(Y_k = +1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_k = -1)$, dove $p \in (0, 1)$ è tale che $\rho = (1-p)/p > 1$. Poniamo $S_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ e $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Per $n, \ell = 0, 1, \ldots$, siano

$$X_n = \rho^{S_n} \quad \text{e} \quad \tau_\ell = \inf\{k \geq 0 \,:\, S_k \geq \ell\}.$$

a) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala che converge q.c. a 0.

b) Verificare che τ_ℓ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto e che $\{X_{\tau_\ell \wedge n}\}_n$ converge q.c. e in L^1 a

$$W = \rho^\ell \mathbf{1}_{\{\tau_\ell < +\infty\}}.$$

c) Dedurre che $\mathbb{P}(\tau_\ell < +\infty) = \rho^{-\ell}$.

d) Posto $Z = \sup_n S_n$, provare che $\mathbb{P}(Z < k) = 1 - \rho^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$ e che quindi[6] $Z \sim\mathrm{Ge}(\alpha_\rho)$ con $\alpha_\rho = 1 - \rho^{-1}$. In particolare, verificare che $Z < +\infty$ q.c.

[6] Ricordiamo che $Z \sim\mathrm{Ge}(\alpha)$ se $\alpha \in (0, 1)$ e $\mathbb{P}(Z = j) = (1 - \alpha)^j \alpha$, per $j = 0, 1, \ldots$

Esame scritto - I Sessione, I Appello
Complementi di Probabilità
A.A. 2009/2010, L. Caramellino

[Per il recupero del I esonero: esercizio 1, **a)**, **b)** e **c)**; esercizio 2.
Per il recupero del II esonero: esercizio 1, **a)** e **d)**; esercizio 3.
Per la prova scritta: esercizio 1, **a)** e **d)**; esercizi 2 e 3.]

Esercizio 1. Sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ e siano X^+ e X^- rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di X. Sia $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ l'aspettazione sotto $\mathbb{P}$ e sia $\mathbb{Q}$ la funzione d'insieme definita da

$$\mathbb{Q}(A) = 2\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^+ \mathbf{1}_A).$$

a) Verificare che $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ tale che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e scrivere $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Nel seguito, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ denoterà l'aspettazione sotto $\mathbb{Q}$.

b) Dire se $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e in caso affermativo scrivere $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

c) Sia f una funzione boreliana tale che $f(X^-) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$. Calcolare $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(f(X^-))$.

d) Sia g una funzione boreliana tale che $g(X) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$. Dimostrare che $g(X^+) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(X) \mid X^+)$ q.c.

Esercizio 2. Sia X una v.a. su $\mathbb{R}$ e, per $n \geq 1$, sia Z_n una v.a. indipendente da X e tale che $\mathbb{P}(Z_n = +1/n) = p_n = 1 - \mathbb{P}(Z_n = -1/n)$ con $p_n \in (0,1)$. Poniamo $Y_n = Z_n X$, $n \geq 1$.

a) Scrivere la funzione caratteristica di Y_n.

b) Discutere la convergenza in legge, in probabilità, q.c. e in L^p della successione $\{Y_n\}_n$.

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $\mathbb{P}(X_n = +1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$ con $p = 1/(e+1)$. Definiamo $X_0 = 0$ e per $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, $S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ e $Y_n = e^{S_n}$.

a) Dimostrare che $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala che converge q.c. ma non in L^1 ad una v.a. da determinare.

Poniamo $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n = +1\}$ e per $n \geq 0$, $Y_n^\tau = Y_{\tau \wedge n}$.

b) Dimostrare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto q.c. finito e che $\{Y_n^\tau\}_{n\geq 0}$ è un processo limitato[7].

c) Dimostrare che $\{Y_n^\tau\}_{n\geq 0}$ converge q.c. e in L^p per ogni $p \geq 1$ alla v.a. $Z = e^{-\tau+2}$. Dedurre che $\mathbb{E}(e^{-\tau}) = e^{-2}$.

[7]Cioè, esiste $L > 0$ tale che $\sup_n |Y_n^\tau| \leq L$ q.c.

Esame scritto - I Sessione, II Appello
Complementi di Probabilità
A.A. 2009/2010, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. di legge $\mathrm{N}(0,1)$ e sia $\mathbb{Q}$ tale che

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = c\, e^{-X^2}$$

dove c denota una costante che rende $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ uno spazio di probabilità.

a) Calcolare c e dire se $e^{X^2} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e/o $e^{X^2} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$.

b) Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. ed indipendente da X in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tale che $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 2$.

- **b1)** Verificare che le X_n rimangono i.i.d. anche sotto $\mathbb{Q}$ e calcolare $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_n)$, $\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}(X_n)$.
- **b2)** Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}(\sum_{k=1}^n X_k > \sqrt{n})$.

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tale che, per $n \geq 1$, X_n ha legge

$$\Lambda_n(A) = p_n \delta_{\{n\}}(A) + (1-p_n)\frac{\mu(A\cap K_n)}{\mu(K_n)}, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

in cui $\delta_{\{n\}}$ denota la massa di Dirac in n, $K_n = [-1/n, +1/n]$, $p_n \in (0,1)$ e μ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

a) Dire se $\{\Lambda_n\}_n$ è tight.

b) Sia $p_n = 1/n^2$. Discutere la convergenza in probabilità, in legge, q.c. e in L^p della successione $\{X_n\}_n$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sia $\{Y_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $\mathbb{P}(Y_k = +1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(Y_k = 0) = 1/2$. Per $n = 0, 1, \dots$, siano $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ e $X_n = \prod_{k=0}^n (Y_k + 1)$. Definiamo infine $\tau = \inf\{k \geq 0 \,:\, Y_k = -1\}$.

a) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

b) Provare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto q.c. finito e che $X_\tau = 0$ q.c.

c) Dimostrare che, per $n \to \infty$, $\{X_{\tau\wedge n}\}_n$ converge q.c. ma non in L^1.

I Esonero
Complementi di Probabilità
A.A. 2010/2011, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. reale assolutamente continua con densità $p(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $Y = X\mathbf{1}_{\{|X|\leq 1\}} - X\mathbf{1}_{\{|X|>1\}}$. Indichiamo con $\mathbb{E}$ l'aspettazione in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

a) Verificare che X e Y hanno la stessa legge e dire se X e Y sono indipendenti.

Sia $\mathbb{Q}$ definita da

$$\mathbb{Q}(A) = c\,\mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_A), \quad A \in \mathscr{F},$$

dove $c > 0$ è una costante che rende $\mathbb{Q}$ una misura di probabilità.

b) Calcolare c.

c) Dire se $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e/o $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e in caso affermativo, calcolare $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ e/o $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

d) Verificare che Y^{-1} è una v.a. ben posta e dire se per qualche $p \geq 1$, $Y^{-1} \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e/o $Y^{-1} \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$.

Esercizio 2. Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. tali che $Y_n > 0$ q.c. e $\log Y_n \in L^2$. Per $n \geq 1$, sia $Z_n = \big(\prod_{i=1}^n Y_i\big)^{1/n}$. Dimostrare che esiste $c \leq \mathbb{E}(Y_1)$ tale che $Z_n \to c$ q.c.

Esercizio 3. Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. tali che, per ogni n, Y_n ha legge $\mathrm{Exp}(n)$. Posto $X_n = e^{Y_n}$, studiare la convergenza debole, in probabilità e in L^p, con $p \geq 1$, di $\{X_n\}_n$.

II Esonero
Complementi di Probabilità
A.A. 2010/2011, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F})$, siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ due misure di probabilità tali che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Indichiamo con $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ l'aspettazione rispettivamente sotto $\mathbb{P}$ e sotto $\mathbb{Q}$. Sia $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$. Dimostrare che se $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ è $\mathscr{G}$-misurabile allora per ogni $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q}) \cap L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, \mathscr{G}), \quad \mathbb{Q}\text{-q.c.}$$

Esercizio 2. Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., con $\mathbb{E}(X_1) = 0$ e $\mathrm{Var}(X_1) = 1$, e sia $\{\alpha_k\}_k \subset \mathbb{R}$ tale che $\sum_{k\geq 0} \alpha_k^2 < \infty$. Dimostrare che

$$M_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X_k \quad \text{q.c.}$$

esiste ed è una v.a. di L^2, di media nulla e di varianza $\sum_{k\geq 0} \alpha_k^2$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano: $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione; τ_1 e τ_2 due $\mathscr{F}_n$-tempi d'arresto q.c. finiti; $\{X_n\}_n$ una $\mathscr{F}_n$-martingala q.c. non negativa ($X_n \geq 0$ q.c. per ogni n). Posto $\tau = \tau_1 \vee \tau_2 \equiv \max(\tau_1, \tau_2)$, dire se $\{X_{n\wedge\tau}\}_n$ converge q.c. per $n \to \infty$ ad una v.a. di L^1 ed in caso affermativo, identificare la v.a. limite.

Esame scritto - I Sessione, I Appello
Complementi di Probabilità
A.A. 2010/2011, L. Caramellino

[per il recupero del I esonero: esercizi 1. e 2.;
per il recupero del II esonero: esercizi 3. e 4.;
per il primo appello d'esame: esercizi 2., 4. ed uno a scelta tra 1. e 3.]

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. di legge[8] $\mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Fissato $\mu > 0$, sia $Z = c\,(\mu/\lambda)^X$ e $\mathbb{Q}$ tale che $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z$, dove $c > 0$ rende $\mathbb{Q}$ una misura di probabilità.

- **a)** Calcolare c.
- **b)** Calcolare la legge di X sotto $\mathbb{Q}$.
- **c)** Sia Y una v.a. indipendente da X in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. X e Y sono indipendenti anche sotto $\mathbb{Q}$?

Esercizio 2. Sia $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ e, per $n \geq 1$, sia $Y_n = X\mathbf{1}_{\{|X| \leq 1/n\}} - X\mathbf{1}_{\{|X|>1/n\}}$. Studiare la convergenza in legge, q.c., in probabilità e in L^p della successione $\{Y_n\}_n$.

Esercizio 3. Siano X, Y_1, Y_2 v.a. su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tali che $\Lambda_{X,Y_1} = \Lambda_{X,Y_2}$, essendo Λ_{X,Y_i} la legge della coppia (X, Y_i), $i = 1, 2$.

- **a)** Dimostrare che Y_1 e Y_2 hanno la stessa legge.

Nel seguito, indicheremo con μ la una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ che dà la legge (comune) di Y_1 e di Y_2.

- **b)** Supponiamo $X \in L^1$ e siano $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni boreliane tali che

$$\phi_1(Y_1) = \mathbb{E}(X \,|\, Y_1) \quad \text{e} \quad \phi_2(Y_2) = \mathbb{E}(X \,|\, Y_2).$$

Dimostrare che $\phi_1 = \phi_2$ μ-q.c. e dedurre che $\phi_1(Y_1)$ e $\phi_2(Y_2)$ hanno la stessa legge.

Esercizio 4. Sia $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti e tali che, per $k \geq 1$, $Y_k \sim \mathrm{Bi}(k, \frac{1}{k})$. Per $n \geq 0$, definiamo $M_0 = 1$, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$,

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k \quad \text{e} \quad \mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n).$$

Sia inoltre $\tau = \inf\{k \geq 1 \,:\, Y_k > 1\}$, con la convenzione $\tau = +\infty$ se $\{k \geq 1 \,:\, Y_k > 1\} = \emptyset$.

- **a)** Verificare che $M = \{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.
- **b)** Dimostrare che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto q.c. finito.
- **c)** Mostrare che $M_{\tau\wedge n} \to M_\tau$ q.c. per $n \to \infty$ e dire se converge anche in L^1 e/o in L^2.

[8] Ricordiamo che $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ assume valori in $\{0, 1, \ldots\}$ ed ha legge $\Lambda_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$ Ricordiamo anche che $X \in L^p$ per ogni $p \geq 1$ ed in particolare, $\mathbb{E}(X) = \lambda = \mathrm{Var}(X)$.

Esame scritto - I Sessione, II Appello
Complementi di Probabilità
A.A. 2010/2011, L. Caramellino

Esercizio 1. Sia $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 2$, una v.a. q.c. non negativa, di media 1.

a) Sia $\{Y_k\}_k$ una successione di v.a. indipendenti e tali che, per ogni $k \neq j$, $\Lambda_{X,Y_k} = \Lambda_{X,Y_j}$, essendo Λ_{X,Y_n} la legge della coppia (X, Y_n). Per $k \geq 1$, sia $\mathscr{G}_k = \sigma(Y_k)$. Studiare la convergenza q.c. della successione $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}_k)\}_n$.

b) Sia $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$ e sia $\mathbb{Q}$ la misura su $(\Omega, \mathscr{F})$ tale che $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})$, dove $\mathbb{E}(\cdot \,|\, \mathscr{G})$ denota l'aspettazione condizionata sotto $\mathbb{P}$. Verificare che $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ e dire se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando accuratamente la risposta: *con le ipotesi fatte si ha che* $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ *per ogni* $0 < q \leq p - 1$.

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia Y una v.a. e $\{Z_n\}_n$ una successione indipendente da Y. Assumiamo che Y sia una gaussiana standard e che, per ogni $n \geq 1$, Z_n abbia legge uniforme sull'intervallo $(0, 1/n)$. Poniamo quindi $X_n = Y Z_n$, $n \geq 1$.

a) Scrivere la funzione caratteristica di X_n e studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$.

b) Studiare la convergenza in probabilità, q.c. e in L^p della successione $\{X_n\}_n$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. gaussiane standard. Definiamo $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Siano $S_0 = 0$ e per $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Per $\vartheta \in \mathbb{R}$, poniamo

$$M_n = \exp\Big(\vartheta S_n - \frac{\vartheta^2}{2}\, n\Big), \quad n \geq 0.$$

a1) Verificare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingale, per ogni ϑ.

a2) Dire se $\{M_n\}_n$ converge q.c. per $n \to \infty$ ed in caso affermativo determinare il limite q.c. Dire poi se $\{M_n\}_n$ è uniformemente integrabile.

b) Sia $\tau = |X_1|$.

b1) È vero che τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto?

b2) Sia $\mathcal{N} = \{A \in \mathscr{F} \,:\, \mathbb{P}(A) = 0\}$ e[9], per $n \geq 0$, $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_n \vee \sigma(\mathcal{N})$. Verificare che $\{\mathscr{G}_n\}_n$ è una filtrazione e dire se τ è un $\mathscr{G}_n$-tempo d'arresto.

[9] Ricordiamo che prese due σ-algebre Σ_1 e Σ_2 su S, $\Sigma_1 \vee \Sigma_2$ denota la più piccola σ-algebra su S che le contiene entrambe: $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 = \sigma(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$.

Esame scritto - II Sessione, Appello unico
Complementi di Probabilità
A.A. 2010/2011, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. reale a valori in $E = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ con legge data da $\mathbb{P}(X = k) = 2^{-(|k|+1)}$, $k \in E$.

a) Per $a > 1$, sia $Y = X\mathbf{1}_{\{|X| \leq a\}} - X\mathbf{1}_{\{|X| > a\}}$.

a1) Verificare che X e Y hanno la stessa legge.

a2) Dire se X e Y sono indipendenti.

b) Indichiamo con $\mathbb{E}$ l'aspettazione in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sia $\mathbb{Q}$ la misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ definita da $\mathbb{Q}(A) = c\,\mathbb{E}(e^{-|X|}\mathbf{1}_A)$, $A \in \mathscr{F}$.

b1) Calcolare c.

b2) Dire se $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e/o $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e in caso affermativo, scrivere $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ e/o $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

b3) Dire se $e^X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e/o $e^X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$.

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia Y una v.a. e $\{Z_n\}_n$ una successione indipendente da Y tale che $Z_n \to c$ in legge, dove c è una costante opportuna. Indichiamo con φ_{YZ_n} e φ_Y rispettivamente la funzione caratteristica di YZ_n e di Y.

a) Dimostrare che $\varphi_{YZ_n}(t) = \mathbb{E}(\varphi_Y(tZ_n))$.

b) Dimostrare che $\varphi_Y(tZ_n) \to \varphi_Y(tc)$ in legge e quindi in probabilità.

c) Dimostrare che $\varphi_Y(tZ_n) \to \varphi_Y(tc)$ in L^1.

[Sugg.: usare le proprietà delle funzioni caratteristiche]

d) Dedurre da **a)** e **c)** che $YZ_n \to cY$ in legge.

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una successione di v.a. i.i.d. tale che $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = 1/2 = \mathbb{P}(X_n = 3/2)$. Per $n \geq 0$, siano $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ e $M_n = \prod_{k=0}^n X_k$. Verificare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala che converge q.c. Identificare il limite q.c. e dire se la convergenza vale anche in L^p per qualche $p \geq 1$.