Esame scritto - III Sessione, Appello unico
Complementi di Probabilità
A.A. 2011/2012, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. reale tale che $\mathbb{E}(X) = 0$ e $\mathrm{Var}(X) = 1$. Sia $\mathbb{Q} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ definita da $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_A)$, $A \in \mathscr{F}$.

a) Verificare che $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ tale che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, e scrivere $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Sotto quali condizioni si ha anche $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$? E in tal caso, chi è $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$?

b) Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano $Y_0, Y_1, \ldots$ v.a. i.i.d., con $Y_0 = X$. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia

$$Z_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n Y_k, \quad n \geq 1.$$

Discutere la convergenza debole, per $n \to \infty$, di $\{Z_n\}_n$ nello spazio $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ al variare di $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. uniformi su $[a, b]$, dove $a \leq b$. Posto

$$Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n),$$

studiare la convergenza della successione $\{Z_n\}_n$ in probabilità, in legge, q.c. e in L^p, $p \geq 1$.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. di legge Exp(1). Definiamo $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Siano $S_0 = 0$ e per $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Per $\theta \in (0, 1)$, poniamo

$$M_n = (1 - \theta)^n \, e^{\theta \, S_n}, \quad n \geq 0.$$

a1) Verificare che $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingale, per ogni $\theta \in (0, 1)$.

a2) Dire se $\{M_n\}_n$ converge q.c. per $n \to \infty$ ed in caso affermativo determinare il limite q.c. Dire poi se $\{M_n\}_n$ è uniformemente integrabile.

b) Per $n \geq 0$, sia $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_n \vee \sigma(M_1)$. Dire se $\{\mathscr{G}_n\}_n$ è una filtrazione e dire se $\tau = [X_1]$ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto e/o un $\mathscr{G}_n$-tempo d'arresto.

Soluzioni

Esercizio 1 a) $X^2 \geq 0$ e $\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) = 1$, dunque $\mathbb{Q}$ è una probabilità. Inoltre, se $\mathbb{P}(A) = 0$ allora $X^2\mathbf{1}_A = 0$ q.c. e quindi $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}_A) = 0$, cioè $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Ed ovviamente, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = X^2$.
Per avere $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, dev'essere $\mathbb{P}(A) = 0$ se $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}_A) = 0$. In particolare, preso $A = N = \{X = 0\}$, si ha $\mathbb{Q}(N) = 0$ e quindi $\mathbb{P}(N) = 0$. Dunque, condizione necessaria perché si abbia $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ è che $\mathbb{P}(N) = 0$. Mostriamo che è anche sufficiente. Nell'ipotesi $\mathbb{P}(N) = 0$, la condizione $\mathbb{Q}(A) = 0$ significa che

$$0 = \mathbb{E}(\underbrace{X^2\mathbf{1}_{A\cap N}}_{=0\ \mathbb{P}\text{-q.c.}}) + \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}_{A\cap N^c}) = \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}_{A\cap N^c}).$$

Poiché $X^2 > 0$ su $A\cap N^c$, dev'essere $\mathbb{P}(A\cap N^c) = 0$ e quindi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap N)+\mathbb{P}(A\cap N^c) = 0$, da cui la tesi.
Riassumendo, $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ se e solo se $\mathbb{P}(N) = 0$, ed in tal caso $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = X^{-2}$.
b) Osserviamo che, per ogni n e per ogni funzione boreliana limitata $g_1, \ldots, g_n$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g_1(Y_1)\cdots g_n(Y_n)) =& \mathbb{E}(X^2 g_1(Y_1)\cdots g_n(Y_n)) = \mathbb{E}(\underbrace{Y_0^2 g_1(Y_1)\cdots g_n(Y_n)}_{\textit{sono indip.}})\\
=& \underbrace{\mathbb{E}(Y_0^2)}_{=1}\mathbb{E}(g_1(Y_1))\cdots\mathbb{E}(g_n(Y_n))\\
=& \underbrace{\mathbb{E}(Y_0^2)}_{=1}\mathbb{E}(g_1(Y_1))\cdots\underbrace{\mathbb{E}(Y_0^2)}_{=1}\mathbb{E}(g_n(Y_n))\\
=& \mathbb{E}(\underbrace{Y_0^2 g_1(Y_1)}_{\textit{sono indip.}})\cdots\mathbb{E}(\underbrace{Y_0^2 g_n(Y_n)}_{\textit{sono indip.}})\\
=& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g_1(Y_1))\cdots\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g_n(Y_n)),
\end{aligned}$$

il che prova che le v.a. $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ sono indipendenti sotto $\mathbb{Q}$. Inoltre, per ogni k, dai conti sopra si ha anche

$$\mathbb{Q}(Y_k \in A) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k\in A}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_k\in A}) = \mathbb{P}(Y_k \in A),$$

dunque sotto $\mathbb{Q}$ le v.a. $Y_1, Y_2, \ldots$ sono equidistribuite ed hanno la stessa legge che avevano sotto $\mathbb{P}$. In particolare, hanno media 0 e varianza 1, ed il TLC dà

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to \mathrm{N}(0,1) \text{ in legge sotto } \mathbb{Q}.$$

Preso ora $\alpha > 1/2$, si ha

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \underbrace{n^{1/2-\alpha}}_{\to 0} \times \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to 0 \text{ in legge sotto } \mathbb{Q}.$$

Esercizio 2 Osserviamo che, per $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z_n < z) = \mathbb{P}(X_1 < z, \dots, X_n < z) = \mathbb{P}(X_1 < z)^n.$$

Quindi, per $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(b - Z_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n < b - \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \geq b - a \\ 1 - \frac{\varepsilon}{b-a} & \text{se } 0 < \varepsilon < b - a \end{cases}$$

Essendo $b - Z_n = |Z_n - b|$, otteniamo $\mathbb{P}(|Z_n - b| > \varepsilon) \to 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, quindi $Z_n \to b$ in probabilità. Ma si ha anche $\sum_n \mathbb{P}(|Z_n - b| > \varepsilon) < \infty$, e il lemma di Borel Cantelli assicura che $Z_n \to b$ q.c. Ciò prova che $Z_n \to b$ in legge. Infine, preso $p \geq 1$, poiché $|Z_n - b|^p \to 0$ q.c. e $|Z_n - b|^p \leq c_p b^p \in L^1$, per DOm si ha $Z_n \to b$ in L^p.

Esercizio 3. a) Osserviamo che se $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ allora $e^{\theta X} \in L^1$ se e solo se $\theta < 1$, e in tal caso $\mathbb{E}(e^{\theta X}) = (1-\theta)^{-1}$

a1) M_n è, a meno di una costante, il prodotto delle v.a. indipendenti $e^{\theta X_1}, \dots, e^{\theta X_n}$, ciascuna delle quali è $\mathscr{F}_n$-misurabile ed integrabile, dunque anche M_n lo è. Poi,

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n \ mis.} \times (1-\theta) \underbrace{e^{\theta X_{n+1}}}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n \times \underbrace{(1-\theta)\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}})}_{=1} = M_n,$$

dunque $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

a2) Per la LFGN, $S_n/n \to \mathbb{E}(X_1) = 1$ q.c. Osservando che, per $\theta \in (0,1)$, $\log(1-\theta) + \theta < 0$, si ha

$$M_n = \exp\Big\{ n\Big(\log(1-\theta) + \theta\, \frac{1}{n}\, S_n \Big) \Big\} \to 0$$

q.c. Se $\{M_n\}_n$ fosse uniformemente integrabile, si avrebbe $M_n \to 0$ in L^1, ma questo è falso: se così fosse allora dovrebbe essere $\mathbb{E}(M_n) \to 0$, il che è impossibile perché $\mathbb{E}(M_n) = 1$ per ogni n. Dunque, non è uniformemente integrabile.

b) Osserviamo che $M_1 = g(X_1)$ con g invertibile, dunque $\sigma(M_1) = \sigma(X_1) = \mathscr{F}_1$. Essendo $\mathscr{F}_0$ la sigma algebra banale ed essendo $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_n$ per ogni $n \geq 1$, si ha $\mathscr{G}_0 = \mathscr{F}_1$ e per $n \geq 1$, $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_n$. Quindi, $\{\mathscr{G}_n\}_n$ è effettivamente una filtrazione.

Poi, per $n \geq 0$,

$$\{\tau = n\} = \{[X_1] = n\} = \{n \leq X_1 < n+1\} \in \mathscr{F}_1.$$

Quindi, τ non è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_n$ se $n \geq 1$ ma per $n = 0$, si ha $\{\tau = 0\} = \{X_1 < 1\} \notin \mathscr{F}_0$. Però lo è rispetto alla filtrazione $\mathscr{G}_n$: si ha banalmente $\{\tau = n\} \in \mathscr{G}_n$ per ogni n.