ESAME SCRITTO - II SESSIONE, APPELLO UNICO
 COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ
 A.A. 2011/2012, L. CARAMELLINO

Esercizio 1. Su $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, siano μ e ν le due misure di probabilità definite da

$$\frac{d\mu}{d\text{Leb}_2}(x) = \frac{1}{\pi|x|^4} \mathbf{1}_{x \in \Gamma} \quad \text{e} \quad \frac{d\nu}{d\text{Leb}_2}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|x|^2}{2}},$$

dove $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$, essendo $|x|$ la norma euclidea su $\mathbb{R}^2$.

- a) Dire se $\mu \ll \nu$ e/o $\nu \ll \mu$, ed in caso affermativo scrivere $\frac{d\mu}{d\nu}$ e/o $\frac{d\nu}{d\mu}$.
- b) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia X una v.a. a valori in $\mathbb{R}^2$ di legge ν . Sia $\mathbb{Q}$ la misura definita da

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{2}{|X|^4} e^{\frac{|X|^2}{2}} \mathbf{1}_{X \in \Gamma}.$$

- b1) Verificare che $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.
- b2) Detta $\Lambda_X^{\mathbb{Q}}$ la legge di X sotto $\mathbb{Q}$, verificare che $\Lambda_X^{\mathbb{Q}} = \mu$ e dire per quali $p \geq 1$ si ha $|X| \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Esercizio 2. Sia $\{Z_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. su $\mathbb{R}$ q.c. non negative, integrabili e tali che $\mathbb{P}(Z_1 \leq z) < 1$ per ogni $z > 0$. Posto

$$X_n = \min(Z_1, \dots, Z_n), \quad n \geq 1,$$

studiare la convergenza di $\{X_n\}_n$ in probabilità, in legge, q.c. e in L^1 .

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. indipendenti tali che, per $n \geq 0$,

$$X_n = \begin{cases} \pi & \text{con probabilità } \frac{1-e^{-\gamma_n}}{4}, \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{1+e^{-\gamma_n}}{2}, \\ -\pi & \text{con probabilità } \frac{1-e^{-\gamma_n}}{4}, \end{cases}$$

dove $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ è una successione a valori in $(0, +\infty)$ tale che $\gamma^* := \sum_{n \geq 0} \gamma_n < \infty$. Per $n \geq 0$, definiamo $S_n = X_0 + \dots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ e

$$M_n = c_n e^{iS_n}, \quad \text{dove} \quad c_n = \exp\left(\sum_{k=0}^n \gamma_k\right).$$

Dimostrare che $\{M_n\}_{n \geq 0}$ è una $\mathcal{F}_n$ -martingala (complessa) che converge q.c. ad una v.a. $Z \in L^p$ per ogni $p \geq 1$. Calcolare inoltre $\mathbb{E}(Z^p)$ per $p \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) Non è vero che $\nu \ll \mu$: preso ad esempio $A = B(0, 1/2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/2\}$ si ha $\mu(A) = 0$ ma $\nu(A) > 0$. Invece, si ha $\mu \ll \nu$. Infatti, se $\nu(A) = 0$ allora $\text{Leb}_2(A) = 0$ (perché $\frac{d\nu}{d\text{Leb}_2} > 0$ e quindi $\nu \sim \text{Leb}_2$) ed essendo $\mu \ll \text{Leb}_2$, si ha anche $\mu(A) = 0$. Quindi

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{\frac{d\mu}{d\text{Leb}_2}}{\frac{d\nu}{d\text{Leb}_2}} = \frac{2}{|x|^4} e^{\frac{|x|^2}{2}} \mathbf{1}_{x \in \Gamma}.$$

b1) Perché $\mathbb{Q}$ sia una misura di probabilità basta mostrare che $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$. Infatti,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\Omega) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{2}{|X|^4} e^{\frac{|X|^2}{2}} \mathbf{1}_{X \in \Gamma}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mu}{d\nu}(X)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu}{d\nu}(x) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) = \mu(\mathbb{R}^2) = 1. \end{aligned}$$

b2) Per $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, si ha

$$\begin{aligned} \Lambda_X^{\mathbb{Q}}(A) &= \mathbb{Q}(X \in A) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{X \in A}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{1}_{X \in A} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{1}_{X \in A} \frac{2}{|X|^4} e^{\frac{|X|^2}{2}} \mathbf{1}_{X \in \Gamma}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x \in A} \frac{2}{|x|^4} e^{\frac{|x|^2}{2}} \mathbf{1}_{x \in \Gamma} \nu(dx) = \int_A \frac{1}{\pi|x|^4} \mathbf{1}_{x \in \Gamma} dx \end{aligned}$$

da cui segue che $\Lambda_X^{\mathbb{Q}} \ll \text{Leb}_2$ e che

$$\frac{d\Lambda_X^{\mathbb{Q}}}{d\text{Leb}_2}(x) = \frac{1}{\pi|x|^4} \mathbf{1}_{x \in \Gamma} = \frac{d\mu}{d\text{Leb}_2}(x),$$

e quindi $\Lambda_X^{\mathbb{Q}} = \mu$. Infine,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|X|^p) = \int |x|^p \mu(dx) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\pi} |x|^{p-4} dx$$

Passando in coordinate polari, otteniamo

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|X|^p) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\infty} \frac{1}{\pi} r^{p-4} r dr = 2 \int_1^{\infty} r^{p-3} dr$$

che è finito se e solo se $p < 2$. Dunque, $|X| \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ per $p \in [1, 2)$.

Esercizio 2. Osserviamo che, per $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_n > x) = \mathbb{P}(Z_1 > x, \dots, Z_n > x) = \mathbb{P}(Z_1 > x)^n.$$

Dunque, preso $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_1 > \varepsilon)^n = \rho_{\varepsilon}^n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

perché $\rho_\varepsilon := \mathbb{P}(Z_1 > \varepsilon) \in [0, 1)$. Ciò prova che $X_n \rightarrow 0$ in probabilità, quindi $X_n \rightarrow 0$ in legge. Inoltre, si ha anche

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_n \rho_\varepsilon^n < \infty,$$

e dunque $X_n \rightarrow 0$ q.c. Infine, essendo $X_n \rightarrow 0$ q.c. e $|X_n| = X_n \leq Z_1 \in L^1$, usando DOM si ottiene $X_n \rightarrow 0$ in L^1 .

Esercizio 3. Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$, dove $\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ (perché $S_n = X_0 + \dots + X_n$ e $X_n = S_n - S_{n-1}$, dove si ponga $S_{-1} = 0$). Cominciamo dalla proprietà di martingala: M_n è ovviamente $\mathcal{F}_n$ -misurabile, $M_n \in L^1$ perché limitata ($|M_n| \leq c_n$) ed infine

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{c_{n+1} e^{iS_n}}_{\mathcal{F}_n\text{-mis.}} \underbrace{e^{iX_{n+1}}}_{\perp \text{ da } \mathcal{F}_n} | \mathcal{F}_n) = c_{n+1} e^{iS_n} \mathbb{E}(e^{iX_{n+1}}).$$

Ma

$$\mathbb{E}(e^{iX_{n+1}}) = e^{i\pi} \frac{1 - e^{-\gamma_{n+1}}}{4} + \frac{1 + e^{-\gamma_{n+1}}}{2} + e^{-i\pi} \frac{1 - e^{-\gamma_{n+1}}}{4} = e^{-\gamma_{n+1}},$$

da cui si ottiene

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \underbrace{c_{n+1} e^{-\gamma_{n+1}}}_{=c_n} e^{iS_n} = c_n e^{iS_n} = M_n.$$

Studiamo ora la costante c_n . Si ha

$$c_n = \exp\left(\sum_{k=0}^n \gamma_k\right) \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\right) = \exp(\gamma^*) < \infty$$

e quindi

$$|M_n| \leq c_n \leq e^{\gamma^*} \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \dots$$

Dunque la successione $\{M_n\}_n$ è limitata, quindi limitata in L^p per ogni p . Usando il teorema di convergenza (per la parte reale e per la parte immaginaria di M_n), esiste Z (a valori complessi) tale che $M_n \rightarrow Z$ q.c. e in L^p , per ogni p , dunque $Z \in L^p$. In particolare, si ha $M_n^p \rightarrow Z^p$ q.c. e $|M_n^p| = |M_n|^p \leq e^{p\gamma^*}$, da cui (usando DOM) segue che

$$\mathbb{E}(Z^p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n^p).$$

Calcoliamo $\mathbb{E}(M_n^p)$ per $p \in \mathbb{N}$. Indicando con φ_{X_k} e con φ_{S_n} la funzione caratteristica rispettivamente di X_k e di S_n . Ricordando che le X_k sono indipendenti, possiamo scrivere

$$\mathbb{E}(M_n^p) = c_n^p \mathbb{E}(e^{ipS_n}) = c_n^p \varphi_{S_n}(p) = c_n^p \prod_{k=0}^n \varphi_{X_k}(p).$$

Ma

$$\begin{aligned}\varphi_{X_k}(p) &= \mathbb{E}(e^{ipX_k}) = \underbrace{(e^{ip\pi} + e^{-ip\pi})}_{=2\Re(e^{ip\pi})} \frac{1 - e^{-\gamma k}}{4} + \frac{1 + e^{-\gamma k}}{2} = \Re(e^{ip\pi}) \frac{1 - e^{-\gamma k}}{2} + \frac{1 + e^{-\gamma k}}{2} \\ &= e^{-\gamma k} \mathbf{1}_{p \text{ dispari}} + \mathbf{1}_{p \text{ pari}}.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\mathbb{E}(M_n^p) = c_n^p e^{-\sum_{k=0}^n \gamma k} \mathbf{1}_{p \text{ dispari}} + c_n^p \mathbf{1}_{p \text{ pari}} = e^{(p-1)\sum_{k=0}^n \gamma k} \mathbf{1}_{p \text{ dispari}} + e^p \sum_{k=0}^n \gamma k \mathbf{1}_{p \text{ pari}}.$$

Passando al limite, si ottiene

$$\mathbb{E}(Z^p) = e^{(p-1)\gamma^*} \mathbf{1}_{p \text{ dispari}} + e^{p\gamma^*} \mathbf{1}_{p \text{ pari}}.$$