Esame scritto - I Sessione, II Appello
Complementi di Probabilità
A.A. 2011/2012, L. Caramellino

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia $Y \geq 0$ q.c. una v.a. tale che $\mathbb{E}(Y) = 1$. Sia $\mathbb{Q}$ la misura su $(\Omega, \mathscr{F})$ definita da $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y$ e sia $\mathscr{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathscr{F}$.

a) Dimostrare che se $Y \in L^{2p}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$, allora $\mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{G}) \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$.

b) Siano con $\mathbb{Q}_*$ e $\mathbb{P}_*$ le restrizioni rispettivamente di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{P}$ su $\mathscr{G}$.

b1) Dimostrare che su $(\Omega, \mathscr{G})$, si ha $\mathbb{Q}_* \ll \mathbb{P}_*$ e che $\frac{d\mathbb{Q}_*}{d\mathbb{P}_*} = \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{G})$, dove $\mathbb{E}(\cdot \,|\mathscr{G})$ denota l'aspettazione condizionale sotto la misura (originaria) $\mathbb{P}$.

b2) Supponiamo $\mathscr{G} \perp\!\!\!\perp Y$. Dimostrare che $\mathbb{P}_*$ e $\mathbb{Q}_*$ sono equivalenti su $(\Omega, \mathscr{G})$. È vero che anche $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ sono equivalenti su $(\Omega, \mathscr{F})$?

Esercizio 2. Sia $\{z_n\}_n \subset \mathbb{R}^d$ una successione numerica tale che $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ e sia $\{Z_n\}_n$ una successione di v.a. su $\mathbb{R}^d$ tale che $\mathbb{P}(Z_n = z_n) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, $n \geq 1$. Sia $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ una v.a. indipendente da $\{Z_n\}_n$ e definiamo

$$X_n = Y\, Z_n, \quad n \geq 1.$$

a) Scrivere la funzione caratteristica di X_n, $n \geq 1$.

b) Studiare la convergenza in legge, in probabilità, q.c. e in L^p della successione $\{X_n\}_n$.

Esercizio 3. Sia $X = (X_n)_n$ un processo $\mathscr{F}_n$-adattato, integrabile, non decrescente q.c. e t.c. $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = 2X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$.

a) Dimostrare che $M_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$, converge q.c. ad una v.a. $M_\infty \in L^1$.

b) Supponiamo che la successione $\{\mathbb{E}(X_n)\}_n$ sia limitata. Dimostrare che $M_\infty = 0$ q.c. e che $M_n \to M_\infty$ anche in L^1.

Soluzioni

Esercizio 1. **a)** Usando la disuguaglianza di Jensen (per la media condizionale), la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e ricordando che $\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G}) \ge 0$ q.c. (perché $Y \ge 0$ q.c.), si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})|^p) &\le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}(Y^p\,|\,\mathscr{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^p\,|\,\mathscr{G})\,Y)\\ &\le \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^p\,|\,\mathscr{G})^2)^{1/2}\mathbb{E}(Y^2)^{1/2} \le \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^{2p}\,|\,\mathscr{G}))^{1/2}\mathbb{E}(Y^2)^{1/2}\\ &= \mathbb{E}(Y^{2p})^{1/2}\mathbb{E}(Y^2)^{1/2} < \infty\end{aligned}$$

b1) Se $A \in \mathscr{G}$ è tale che $\mathbb{P}_*(A) = 0$ allora $A \in \mathscr{F}$ e $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_*(A) = 0$, quindi $0 = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}_*(A)$, il che prova che $\mathbb{Q}_* \ll \mathbb{P}_*$. Poi, per $A \in \mathscr{G}$ si ha

$$\mathbb{Q}_*(A) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})\,\mathbf{1}_A\big).$$

Ma $\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G}) \in L^1$, è non negativa q.c., $\mathscr{G}$-misurabile, integrabile e $\mathbb{P}_*$ è la restrizione di $\mathbb{P}$ su $(\Omega, \mathscr{G})$, quindi per $A \in \mathscr{G}$ si ha

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})\,\mathbf{1}_A\big) = \int_\Omega \mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P}_*,$$

cioè

$$\mathbb{Q}_*(A) = \int_A \mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})\,d\mathbb{P}_*, \quad A \in \mathscr{G},$$

da cui segue che $\frac{d\mathbb{Q}_*}{d\mathbb{P}_*} = \mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})$.

b2) Se $\mathscr{G} \perp\!\!\!\perp Y$ allora $\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y) = 1$, quindi $\frac{d\mathbb{Q}_*}{d\mathbb{P}_*} = 1$, cioè $\mathbb{P}_* = \mathbb{Q}_*$. Ciò però non implica che $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ siano uguali o equivalenti su $(\Omega, \mathscr{F})$. Ad esempio, siano $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ con $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$ e $\mathbb{P}(A_1) \in (0,1)$. Siano $Y = \mathbf{1}_{A_1}$ e $\mathscr{G} = \sigma(\mathbf{1}_{A_2})$. In tal caso,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A \cap A_1), \quad A \in \mathscr{F},$$

e in generale $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ non sono equivalenti: se $\mathbb{Q}(A) = 0$ allora $\mathbb{P}(A \cap A_1) = 0$, il che non implica in generale che $\mathbb{P}(A) = 0$.

Esercizio 2. **a)** Osserviamo che $X_n = Z_n Y$è a valori in $\mathbb{R}^d$. Per $t \in \mathbb{R}^d$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{X_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{i\langle t, X_n\rangle}) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X_n\rangle}\mathbf{1}_{Z_n = z_n}) + \mathbb{E}(e^{i\langle t, X_n\rangle}\mathbf{1}_{Z_n = 0})\\ &= \mathbb{E}(e^{i\langle t, z_n Y\rangle}\mathbf{1}_{Z_n = z_n}) + \mathbb{E}(e^{i\langle t, 0\rangle}\mathbf{1}_{Z_n = 0}) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, z_n\rangle Y})\mathbb{P}(Z_n = z_n) + \mathbb{P}(Z_n = 0)\\ &= \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}\langle t, z_n\rangle^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}\langle C_n\,t, t\rangle} + \frac{1}{2},\end{aligned}$$

dove $C_n \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ denota la matrice $C_n = z_n z_n^T$.

b) Se $n \to \infty$, si ha $z_n \to 0$, quindi

$$\varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\langle t, z_n\rangle^2} + \frac{1}{2} \to 1,$$

il che prova che $X_n \to 0$ in legge, quindi in probabilità. Per la convergenza q.c. osserviamo che

$$X_n = YZ_n = YZ_n \mathbf{1}_{Z_n = z_n} + YZ_n \mathbf{1}_{Z_n=0} = Yz_n \mathbf{1}_{Z_n=z_n}.$$

Allora, $|X_n| \le |Y|\,|z_n| \to 0$ q.c. Infine, per ogni n grande si ha $|z_n| \le 1$ e quindi $|X_n|^p \le |Y|^p \in L^1$, e per convergenza dominata otteniamo che $X_n \to 0$ in L^p per ogni $p \ge 1$.

Esercizio 3. a) Mostriamo che $(M_n)_{n\ge 1}$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala. Poiché $M_n = \varphi(X_{n-1}, X_n)$ con φ boreliana e X_{n-1}, X_n v.a. $\mathscr{F}_n$-misurabili, M_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile. $M_n \in L^1$ perché combinazione lineare di $X_{n-1}, X_n \in L^1$. Infine,

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\mathscr{F}_n) - X_n = 2X_n - X_{n-1} - X_n = M_n.$$

Poiché $X_n \ge X_{n-1}$ q.c. si ha anche $M_n \ge 0$ q.c. Quindi, $(M_n)_n$ è una martingala non negativa q.c. e per il teorem di convergenza q.c. per martingale, si ha $M_n \to M_\infty$ per qualche v.a. $M_\infty \in L^1$.

b) Se $(X_n)_n$ è non decrescente q.c. allora la successione $\{\mathbb{E}(X_n)\}_n$ è monotona non decrescente. Essendo anche limitata, esiste $\mu \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{E}(X_n) \uparrow \mu$ per $n \to \infty$. Ma allora

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1}) \to \mu - \mu = 0,$$

e quindi $M_n \to 0$ in L^1. Ma allora, $M_\infty = 0$ q.c. e $M_n \to M_\infty$ q.c. e in L^1.