Esame scritto - I Sessione, I Appello
Complementi di Probabilità
A.A. 2011/2012, L. Caramellino

$$\left[\begin{array}{l}\text{per il recupero del I esonero: esercizi 1. e 2.;}\\ \text{per il recupero del II esonero: esercizi 3. e 4.;}\\ \text{per il primo appello d'esame: esercizi 1., 2. e 4.}\end{array}\right]$$

Esercizio 1. Su $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, sia X una v.a. di legge $\mathrm{N}(0,1)$.

a) Scrivere la legge di $X_+=\max(X,0)$. X_+ è assolutamente continua? X_+ e $X_-=\max(-X,0)$ sono indipendenti?

Sia $\mathbb{Q}$ la misura su $(\Omega,\mathscr{F})$ definita da $\mathbb{Q}(A)=c\mathbb{E}(e^{-X_+^2}\mathbf{1}_A)$, $A\in\mathscr{F}$, con $c>0$.

b) Calcolare c affinché $\mathbb{Q}$ sia una misura di probabilità.

c) Posto $g(x)=e^{x^2}$, siano $Y=g(X_+)$ e $Z=g(X_-)$. Dire per quali $p\geq 1$ si ha $Y\in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{Q})$ e/o $Z\in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{Q})$.

Esercizio 2. Sia μ una misura su $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ e supponiamo che $0<\mu(J_n),\mu(I_n)<\infty$, dove, per $n\geq 1$, $J_n=[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ e $I_n=[n,n+1]$. Siano $X_1,X_2,\dots$ v.a. indipendenti, a valori in $\mathbb{R}$, tali che, per ogni $n\geq 1$, X_n ha legge

$$\mathscr{B}(\mathbb{R})\ni\Gamma\mapsto\Lambda_n(\Gamma)=p_n\,\frac{\mu(\Gamma\cap J_n)}{\mu(J_n)}+(1-p_n)\,\frac{\mu(\Gamma\cap I_n)}{\mu(I_n)},\quad \text{dove } \{p_n\}_n\subset(0,1).$$

a) Verificare che $\{\Lambda_n\}_n\subset\mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ è *tight* se e solo se $p_n\to 1$.

b) Studiare la convergenza in probabilità, in legge, q.c. e in L^p, $p\geq 1$, della successione $\{X_n\}_n$ quando $p_n=1-\frac{1}{n}$ e quando $p_n=\frac{1}{n}$.

Esercizio 3. Su $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, sia (X_n,Y) una v.a. su $\mathbb{R}^2$ di funzione caratteristica

$$\varphi_{X_nY}(t_1,t_2)=\frac{n}{n-i(t_1+nt_2)},\quad n\geq 1.$$

a) Verificare che $Y\geq 0$ q.c. e che $\mathbb{E}(Y)=1$.

b) Sia $\mathbb{Q}$ la misura su $(\Omega,\mathscr{F})$ definita da $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=Y$. Scrivere la funzione caratteristica di X_n sotto $\mathbb{Q}$ e, sempre sotto $\mathbb{Q}$, studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 4. Sia $(M_n)_n$ un processo a incrementi indipendenti e di quadrato integrabile. Supponiamo $M_0=0$ e $\mathbb{E}(M_n-M_{n-1})=0$, $n\geq 1$. Sia $(\mathscr{F}_n)_n$ la filtrazione naturale, $\sigma_0^2=0$ e per $k\geq 1$, $\sigma_k^2=\mathrm{Var}(M_k-M_{k-1})$.

a) Dimostrare che $(M_n)_n$ e $(M_n^2-\sum_{k=0}^n\sigma_k^2)_n$ sono $\mathscr{F}_n$-martingale.

b) Sia $(A_n)_n$ un processo $\mathscr{F}_n$-predicibile, con $A_0=0$, e siano:

$$\tau=\inf\{n\geq 0\,:\,A_n>0\}\quad\text{e}\quad Y_n=\sum_{k=1}^n\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(M_k-M_{k-1}).$$

Verificare che $(Y_n)_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala e nell'ipotesi $\sum_k\sigma_k^2<\infty$, studiare la convergenza di $(Y_n)_n$ in L^2.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Per $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{X_+}(A) =& \mathbb{P}(X_+ \in A) = \mathbb{P}(X_+ \in A, X > 0) + \mathbb{P}(X_+ \in A, X < 0)\\ =& \mathbb{P}(X \in A, X > 0) + \mathbb{P}(0 \in A, X < 0)\\ =& \int_{A\cap[0,+\infty)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx + \mathbf{1}_{0\in A}\underbrace{\mathbb{P}(X<0)}_{=1/2}\\ =& \mu\big(A\cap[0,+\infty)\big) + \frac{1}{2}\,\delta_{\{0\}}(A)\end{aligned}$$

dove μ denota la legge $N(0,1)$. Quindi, detta μ_0 la misura definita da $\mu_0(A) = \mu\big(A \cap [0,+\infty)\big)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, si ottiene

$$\Lambda_{X_+} = \mu_0 + \frac{1}{2}\,\delta_{\{0\}}.$$

Ovviamente X_+ non è assolutamente continua: preso $A = \{0\}$, $\mathrm{Leb}_1(A) = 0$ ma $\Lambda_{X_+}(A) = \frac{1}{2} > 0$. Infine, X_+ e X_- non sono indipendenti: $\mathbb{P}(X_+ > 0, X_- > 0) = 0$ ma $\mathbb{P}(X_+ > 0) > 0$ e $\mathbb{P}(X_- > 0) = \mathbb{P}(X_+ > 0) > 0$.

b) Dev'essere

$$1 = \mathbb{Q}(\Omega) = c\mathbb{E}(e^{-X_+^2}).$$

Calcoliamo la media a destra:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-X_+^2}) &= \mathbb{E}(e^{-X_+^2}\mathbf{1}_{X>0}) + \mathbb{E}(\underbrace{e^{-X_+^2}\mathbf{1}_{X<0}}_{X_+=0 \ su\ \{X<0\}}) = \mathbb{E}(e^{-X^2}\mathbf{1}_{X>0}) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X<0})\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-3x^2/2}\, dx + \underbrace{\mathbb{P}(X<0)}_{=1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Quindi

$$c = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\Big)^{-1}.$$

c) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|Y|^p) &= c\mathbb{E}(e^{pX_+^2}\, e^{-X_+^2}) = c\mathbb{E}(e^{(p-1)X_+^2}\,\mathbf{1}_{X>0}) + c\mathbb{E}(e^{(p-1)X_+^2}\,\mathbf{1}_{X<0})\\ &= c\mathbb{E}(e^{(p-1)X^2}\,\mathbf{1}_{X>0}) + c\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X<0}) = c\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(2p-3)x^2/2}\, dx + \frac{c}{2}\end{aligned}$$

ed il primo integrale è finito se e solo se $2p-3<0$, cioè $p < 3/2$. Dunque, $Y \in L^p(\mathbb{Q})$ per ogni $p \in [1, 3/2)$. Studiamo Z:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|Z|^p) &= c\mathbb{E}(e^{pX_-^2}\, e^{-X_+^2}) = c\mathbb{E}(e^{pX_-^2-X_+^2}\mathbf{1}_{X>0}) + c\mathbb{E}(e^{pX_-^2-X_+^2}\mathbf{1}_{X<0})\\ &= c\mathbb{E}(e^{-X^2}\mathbf{1}_{X>0}) + c\mathbb{E}(e^{pX^2}\mathbf{1}_{X<0})\end{aligned}$$

Ora, la prima media è senz'altro finita. Per la seconda:

$$\mathbb{E}(e^{pX^2}\mathbf{1}_{X<0}) = \mathbb{E}(e^{pX^2}\mathbf{1}_{X>0}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(2p-1)x^2/2}\, dx$$

che è finito se e solo se $2p-1<0$, cioè $p<1/2$. Dunque, $Z \notin L^p(\mathbb{Q})$ per ogni $p \geq 1$.

Esercizio 2. a) Osserviamo innanzitutto che per $M>1$ e $n>M$ si ha

$$\Lambda_n([-M,M]) = p_n.$$

Quindi, se $\{\Lambda_n\}_n$ è tight allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $M_\varepsilon>0$ tale che

$$\inf_n \Lambda_n([-M_\varepsilon, M_\varepsilon]) \geq 1-\varepsilon.$$

Preso $M>1$, $M>M_\varepsilon$ allora per ogni $n>M$ si ha

$$p_n \geq \inf_n \Lambda_n([-M,M]) \geq \inf_n \Lambda_n([-M_\varepsilon, M_\varepsilon]) \geq 1-\varepsilon.$$

Cioè, per ogni $\varepsilon>0$ esiste $n_\varepsilon>0$ tale che se $n>n_\varepsilon$ si ha $p_n \geq 1-\varepsilon$, quindi $p_n \to 1$. Viceversa, se $p_n \to 1$ allora preso $\varepsilon>0$, esiste n_ε tale che per ogni $n>n_\varepsilon$ si ha $p_n>1-\varepsilon$. Quindi, per $M>1$ e $n>n^*_\varepsilon=\max(M,n_\varepsilon)$ si ha

$$\inf_{n>n^*_\varepsilon} \Lambda_n([-M,M]) = \inf_{n>n^*_\varepsilon} p_n \geq 1-\varepsilon,$$

e quindi $\{\Lambda_n\}_n$ è tight.

b) Se $p_n=\frac{1}{n}$, $p_n\to 0$: $\{\Lambda_n\}_n$ non è tight, dunque $\{X_n\}_n$ non converge in legge e, di conseguenza, non converge in nessun altro modo. Supponiamo quindi che $p_n = 1-\frac{1}{n}$. Preso $\varepsilon>0$, per ogni n grande si ha $[-\varepsilon,\varepsilon]^c \cap I_n = I_n$ e $[-\varepsilon,\varepsilon]^c \cap J_n = \emptyset$, quindi

$$\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = \Lambda_n([-\varepsilon,\varepsilon]^c) = 1-p_n \to 0,$$

quindi $X_n \to 0$ in probabilità, dunque anche in legge. Studiamo la convergenza q.c. Qui, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) \simeq \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$, e poiché le X_n sono indipendenti, BC2 garantisce che $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n|>\varepsilon\}) = 1$, quindi X_n non converge q.c. Infine,

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = p_n \frac{1}{\mu(J_n)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^p d\mu(x) + (1-p_n)\frac{1}{\mu(I_n)} \int_n^{n+1} x^p d\mu(x).$$

Ma

$$\frac{1}{(n+1)^p}\,\mu(J_n) \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^p d\mu(x) \leq \frac{1}{n^p}\,\mu(J_n) \quad \text{e} \quad n^p\,\mu(I_n) \leq \int_n^{n+1} x^p d\mu(x) \leq (n+1)^p\,\mu(I_n)$$

e quindi

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) \simeq \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{n^p} + \frac{1}{n}\,n^p \to \begin{cases} 1 & \text{se } p=1 \\ \infty & \text{se } p>1. \end{cases}$$

Ciò prova che $\{X_n\}_n$ non converge in L^p per ogni $p \geq 1$.

Esercizio 3. a) La funzione caratteristica di Y è

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{X_nY}(0,t) = \frac{n}{n - int} = \frac{1}{1-it},$$

quindi $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, il che prova che $Y \geq 0$ q.c. e che $\mathbb{E}(Y) = 1$.
b) Si ha

$$\varphi^{\mathbb{Q}}_{X_n}(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{itX_n}) = \mathbb{E}(e^{itX_n}Y).$$

Ma la funzione caratteristica φ_{X_nY} è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi

$$\partial_{t_2}\varphi_{X_nY}(t_1,t_2) = \partial_{t_2}\mathbb{E}\big(e^{i(t_1X_n+t_2Y)}\big) = \mathbb{E}\big(\partial_{t_2}e^{i(t_1X_n+t_2Y)}\big) = \mathbb{E}\big(iY\, e^{i(t_1X_n+t_2Y)}\big).$$

Allora,

$$\mathbb{E}(e^{itX_n}Y) = \frac{1}{i}\,\partial_{t_2}\varphi_{X_nY}(t_1,t_2)|_{t_1=t,t_2=0}.$$

Essendo

$$\partial_{t_2}\varphi_{X_nY}(t_1,t_2) = \frac{in^2}{(n - i(t_1+nt_2))^2},$$

otteniamo

$$\varphi^{\mathbb{Q}}_{X_n}(t) = \frac{n^2}{(n-it)^2} \to 1, \quad n \to \infty,$$

da cui segue che, sotto $\mathbb{Q}$, $X_n \to 0$ in legge.

Esercizio 4. a) M_n e $X_n = M_n^2 - \sum_{k=0}^n \sigma_k^2$ sono ovviamente $\mathscr{F}_n$-misurabili e poiché $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})$, $M_n, X_n \in L^1$ perché somma di v.a. di L^1. Per verificare la proprietà di martingala, osserviamo che, per ogni $n \geq 0$, l'incremento $M_{n+1} - M_n$ è indipendente da $\mathscr{F}_n$. Infatti, essendo $M_0, M_1, \ldots, M_n$ una funzione invertibile di $M_0, M_1 - M_0, \cdots, M_n - M_{n-1}$, si vede subito che $\mathscr{F}_n = \sigma(M_0, M_1 - M_0, \ldots, M_n - M_{n-1}) \perp\!\!\!\perp M_{n+1} - M_n$. Quindi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) =& \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n + M_n\,|\,\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n) + M_n = M_n;\\
\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) =& \mathbb{E}\Big(M_{n+1}^2 - \sum_{k\leq n+1}\sigma_k^2\,|\,\mathscr{F}_n\Big)\\
=& \mathbb{E}\big((M_{n+1}-M_n)^2 + M_n^2 - 2M_n(M_{n+1}-M_n)\,|\,\mathscr{F}_n\big) - \sum_{k\leq n+1}\sigma_k^2\\
=& \underbrace{\mathbb{E}\big((M_{n+1}-M_n)^2\big)}_{=\sigma_{n+1}^2} + M_n^2 - 2M_n\,\underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n)}_{=0} - \sum_{k\leq n+1}\sigma_k^2\\
=& M_n^2 - \sum_{k\leq n}\sigma_k^2 = X_n.
\end{aligned}$$

b) Studiamo la misurabilità della v.a. $\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}$: poiché $A_0 = 0$, $\{\tau = 0\} = \emptyset$ e per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\{\tau = k\} &= \{A_0 = 0, A_1 \leq 0, \dots, A_{k-1} \leq 0, A_k > 0\}\\ &= \underbrace{\{A_1 \leq 0\}}_{\in \mathscr{F}_0} \cap \cdots \cap \underbrace{\{A_{k-1} \leq 0\}}_{\in \mathscr{F}_{k-2}} \cap \underbrace{\{A_k > 0\}}_{\in \mathscr{F}_{k-1}} \in \mathscr{F}_{k-1}.\end{aligned}$$

Dunque, $\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}$ è $\mathscr{F}_{k-1}$-misurabile e quindi Y_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile perché somma di v.a. che lo sono. Essendo poi $0 \leq \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \leq 1$, si ha $\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(M_k - M_{k-1}) \in L^2$, Y_n risulta anche di quadrato integrabile. Infine,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(Y_n + \underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau=n+1\}}}_{\mathscr{F}_n-mis} \underbrace{(M_{n+1} - M_n)}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n} \mid \mathscr{F}_n)\\ &= Y_n + \mathbf{1}_{\{\tau=n+1\}} \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n)}_{=0} = Y_n\end{aligned}$$

Studiamo il momento secondo di Y_n. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n^2) =& \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}}_{\leq 1} \underbrace{(M_k - M_{k-1})^2}_{\geq 0}\Big) +\\ &+ 2\mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}\mathbf{1}_{\{\tau=j\}}}_{=0 \ if \ k \neq j} (M_k - M_{k-1})(M_j - M_{j-1})\Big)\\ \leq& \sum_{k=0}^{n} \sigma_k^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty\end{aligned}$$

da cui si ottiene $\sup_n \mathbb{E}(Y_n^2) < \infty$. Quindi $(Y_n)_n$ è una martingala limitata in L^2: esiste $Y \in L^2$ t.c. $Y_n \to Y$ q.c. e in L^2, e dunque in L^1. Ed ovviamente,

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(M_k - M_{k-1})$$