Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 12 settembre 2022

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{ax^2}}\log|x| + (\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{ax^4}-1}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento. Visto che in tutti i casi $a > 0$ allora, per $n \in \mathbb{N}$ si ha (ponendo $t = \frac{1}{|x|}$)

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{-\frac{1}{ax^2}}\log|x|}{x^n}\right| = \lim_{t\to+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{a}}\log|t| = 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi, $e^{-\frac{1}{ax^2}}\log|x| = o(x^n)$ per $x \to 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizzando gli sviluppi

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\,, \text{ per } \ x \to 0$$

per il numeratore si trova

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{ax^2}}\log|x| + (\sinh x)^2 - (\sin x)^2 &= (x + \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 + o(x^5) \\ &= \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)\,, \text{ per } \ x \to 0\,. \end{aligned}$$

Utilizzando lo sviluppo

$$e^t = 1 + t + o(t)\,, \text{ per } \ t \to 0$$

per il denominatore si trova

$$e^{ax^4} - 1 = ax^4 + o(x^4)\,, \text{ per } \ x \to 0\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{ax^2}}\log|x| + (\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{ax^4}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^5)}{ax^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{2}{3a} = \begin{cases} \frac{2}{15} & \text{per } a = 5 \\ \frac{1}{6} & \text{per } a = 4 \\ \frac{2}{9} & \text{per } a = 3 \\ \frac{1}{3} & \text{per } a = 2 \end{cases}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{cx}\sqrt{|x-a|-b}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a,b,c) = (3,1,2), (3,2,3), (-3,2,1), (-2,3,1)]$

Svolgimento. In tutti i casi si ha $b > 0$ e $c > 0$. L'espressione $\sqrt{|x-a|-b}$ è definita per $|x-a| \geq b \Leftrightarrow x \in (-\infty, a-b] \cup [a+b, +\infty)$. Quindi il dominio di f è $\mathrm{dom} f = (-\infty, a-b] \cup [a+b, +\infty)$. La funzione è continua in ogni punto del suo dominio. In tutti i casi tranne tranne che nel quarto si ha $0 \in \mathrm{dom} f$ e $f(0) = \sqrt{|a|-b} > 0$. Inoltre, in tutti i casi si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom} f$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \pm b$.

Ricordando che si ha sempre $c > 0$ si trova

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Quindi la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$ mentre f non ha un asintoto (né orizzontale né obliquo) per $x \to +\infty$. Infine, visto che $\mathrm{dom} f$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ e f è continua possiamo concludere che non ha asintoti verticali.

f è derivabile in tutti i punti interni del dominio. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb + 1), & \text{per } x \in (a+b, +\infty) \\ \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb - 1), & \text{per } x \in (-\infty, a-b) \end{cases}$$

Per $x \in (a+b, +\infty)$ il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $2c(x-a) - 2cb + 1 > 1$.
Per $x \in (-\infty, a-b)$ il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $2c(a-x) - 2cb - 1$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, a-b-\frac{1}{2c})$, $f'(x) < 0$ per $x \in (a-b-\frac{1}{2c}, a-b)$ e $f'(a-b-\frac{1}{2c}) = 0$. Possiamo quindi concludere che f è strettamente crescente in $(-\infty, a-b-\frac{1}{2c})$ e in $(a+b, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(a-b-\frac{1}{2c}, a-b)$. $a-b-\frac{1}{2c}$ è un punto di massimo locale mentre $a \pm b$ sono punti di minimo globale.

Resta da discutere la derivabilità nei punti di frontiera $a \pm b$. Utilizzando il teorema di de l'Hôpital si trova

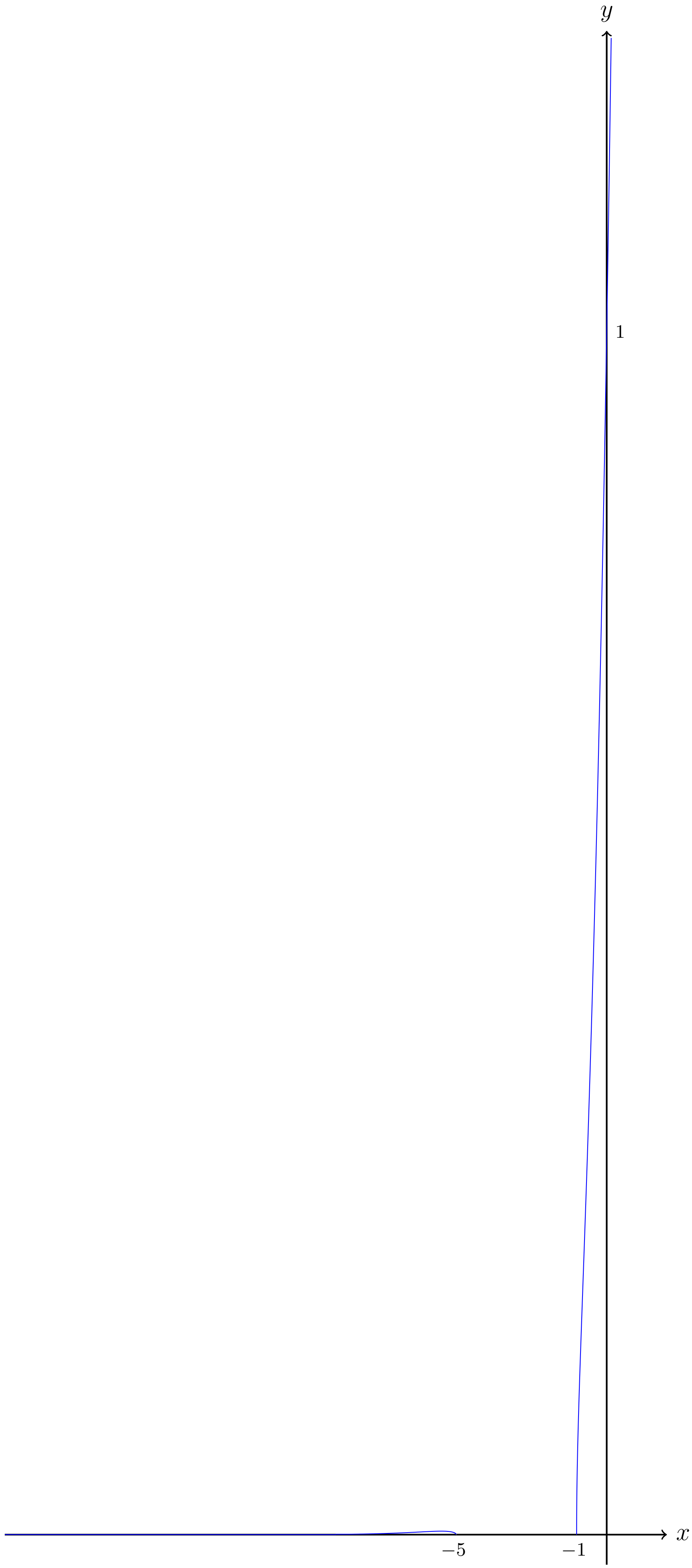
$$\lim_{x\to(a+b)^+} \frac{f(x) - f(a+b)}{x-(a+b)} = \lim_{x\to(a+b)^+} \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb + 1) = \frac{e^{c(a+b)}}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to(a-b)^-} \frac{f(x) - f(a-b)}{x-(a-b)} = \lim_{x\to(a-b)^-} \frac{e^{cx}}{2\sqrt{|x-a|-b}}(2c|x-a| - 2cb - 1) = -\frac{e^{c(a-b)}}{0^+} = -\infty$$

Quindi f non è derivabile in $a \pm b$ (punti a tangente verticale).

Riportiamo qui sotto il grafico di f per $(a,b,c) = (-3,2,1)$.



y
1
x
−5
−1

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha| x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento. In tutti i casi si ha $a \geq 2 > 0$. Inoltre la funzione integranda è non negativa nell'intervallo di integrazione per ogni valore reale del parametro α. Studiamo prima la convergenza a $+\infty$. Si ha

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha| x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \leq \frac{e^{-|\alpha| x}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \leq \frac{x^{a|\alpha|} e^{-|\alpha| x}}{(x+1)(x^2+a^2)}$$

per ogni $x \geq 1$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \neq 0$ allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{a|\alpha|} e^{-\frac{|\alpha|}{2} x}}{(x+1)(x^2+a^2)} = 0\,.$$

Di conseguenza

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha| x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \leq e^{-\frac{|\alpha|}{2} x}$$

definitivamente per $x \to +\infty$ e si ha quindi convergenza a $+\infty$ per il criterio del confronto. Se $\alpha = 0$ si ha

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha| x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} \sim \frac{1}{x^3}$$

per $x \to +\infty$ e si ha nuovamente convergenza a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotico. In conclusione si ha convergenza a $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza in (un intorno destro di) 0. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha| x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)} \sim \frac{1}{a^2 |x|^{a\alpha - \alpha^2}}$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, si ha integrabilità in 0 se e solo se $a\alpha - \alpha^2 < 1$ ossia, ricordando che $a \geq 2$, se e solo

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}, +\infty\right).$$

Riassumendo l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^{\alpha^2} e^{-|\alpha| x^2}}{x^{a\alpha}(x+1)(x^2+a^2)}\, dx.$$

è convergente se e solo se

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}, +\infty\right).$$

. Passiamo ora al calcolo per $\alpha = 0$. In questo caso l'integrale è convergente perché, essendo $a \geq 2$, si ha $\frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2} > 0$. Siamo portati a calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} dx\,.$$

Dalla teoria sappiamo che

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + D}{x^2+a^2}$$

per opportune costanti reali A, B, D. Visto che

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2+a^2} = \frac{(A+B)x^2 + (B+D)x + a^2A + D}{(x+1)(x^2+a^2)}$$

si deve avere $A+B = D+B = 0$ e $a^2A + D = 1$. Quindi $A = D = \frac{1}{a^2+1}$ e $B = -\frac{1}{a^2+1}$ da cui si trova

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^2+1}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2+a^2}\right).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)}dx &= \frac{1}{a^2+1}\left(\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x^2+a^2}dx - \int \frac{x}{x^2+a^2}dx\right) \\
&= \frac{1}{a^2+1}\left(\log|x+1| + \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) - \frac{1}{2}\log(x^2+a^2)\right) + C \\
&= \frac{1}{a^2+1}\log\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + \frac{1}{a^3+a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{(x+1)(x^2+a^2)}dx \\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a^2+1}\left(\log\left(\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2+a^2}}\right) + \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) - \log\left(\frac{1}{a}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2a^3+2a} + \frac{\log a}{a^2+1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (ax+b)\sqrt{\dfrac{y}{1-x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

$[(a,b) = (5,3), (4,2), (6,4), (7,5)]$

Svolgimento. Si tratta di una EDO del primo ordine a variabili separabili. La soluzione $y(x)$ cercata non è stazionaria. Sia ora $y(x)$ definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Visto che l'equazione perde senso per $x \pm 1$ e l'intervallo I deve contenere 0, si ha necessariamente $I \subset (-1,1)$. Di conseguenza si deve avere $y(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$ e possiamo determinare la soluzione cercata ponendo

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int \frac{ax+b}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{y} + C,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx}(1-x^2) dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

e

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C\,.$$

Abbiamo quindi

$$\sqrt{y} = -\frac{a}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{b}{2}\arcsin x + C\,.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ s trova $C = 1 + \frac{a}{2}$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y = \left(\frac{a}{2}(1-\sqrt{1-x^2}) + \frac{b}{2}\arcsin x + 1\right)^2,\ x \in (0,1).$$

Esercizio 5 [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{\arctan x}{1 + e^{ax^2}}.$$

$[a = 3, -3, 2, -2]$

Svolgimento. Per $t \to 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\arctan t &= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^6) \\
e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\
\frac{1}{1+t} &= 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan x}{1 + e^{ax^2}} &= \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}{2 + ax^2 + \frac{a^2}{2}x^4 + o(x^5)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}{1 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{4}x^4 + o(x^5)} \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{a}{2}x^2 - \frac{a^2}{4}x^4 + \frac{a^2}{4}x^4 + o(x^5)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{a}{2}x^2 + o(x^5)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{a}{2}x^3 + \frac{a}{6}x^5 + o(x^6)\right) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{2 + 3a}{12}x^3 + \frac{6 + 5a}{60}x^5 + o(x^6)
\end{aligned}$$

che è lo sviluppo richiesto.