

**Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta luglio 2022**

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+ax} - \cos \sqrt{ax} - ax}{\frac{\pi}{2} + e^{-\frac{x}{b}} - \cosh(cx) - \arctan \frac{b}{x}}$$

$[(a, b, c) = (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2)]$

Soluzione. Dagli sviluppi

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^5) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

si ottiene, per $x \rightarrow 0^+$,

$$\sqrt{1+ax} - \cos \sqrt{ax} - ax = 1 + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a^2x^2 - 1 + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{24}a^2x^2 - ax + o(x^2) = -\frac{1}{6}a^2x^2 + o(x^2).$$

Si ha poi, sempre per $t \rightarrow 0^+$,

$$\arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan t = \frac{\pi}{2} - t + o(t^2), \quad \cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

e pertanto

$$\frac{\pi}{2} + e^{-\frac{x}{b}} - \cosh(cx) - \arctan \frac{b}{x} = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} - 1 - \frac{c^2x^2}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{b} + o(x^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - c^2 \right) x^2 + o(x^2).$$

Il limite richiesto è dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{6}a^2x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - c^2 \right) x^2 + o(x^2)} = \frac{a^2b^2}{3(b^2c^2 - 1)} = \begin{cases} 4, & (a, b, c) = (3, 2, 1), \\ \frac{3}{2}, & (a, b, c) = (2, 3, 1), \\ \frac{1}{6}, & (a, b, c) = (2, 1, 3), \\ 1, & (a, b, c) = (3, 1, 2). \end{cases}$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a \log(1 + |x - b|e^{x-b})$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[(a, b) = (4, 1), (3, 2), (2, -1), (2, -2)]$$

Soluzione. Poiché chiaramente $1 + |x - b|e^{x-b} \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il dominio della funzione data è \mathbb{R} e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con $f(x) = 0$ se e solo se $x = b$. In particolare f non ha asintoti verticali. Essendo poi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a \log(1 - (x - b)e^{x-b}) = 0,$$

l'asse x è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$ per f . Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, e quindi f non ammette un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$, ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} a \frac{\log(1 + (x - b)e^{x-b})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} a \frac{x - b + \log(x - b + e^{-(x-b)})}{x} = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} a (-b + \log(x - b + e^{-(x-b)})) = +\infty,$$

f non ha nemmeno un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Si ha poi

$$\frac{d}{dx} a \log(1 \pm (x - b)e^{x-b}) = \pm a \frac{e^{x-b}(1 + x - b)}{1 \pm (x - b)e^{x-b}},$$

e dunque

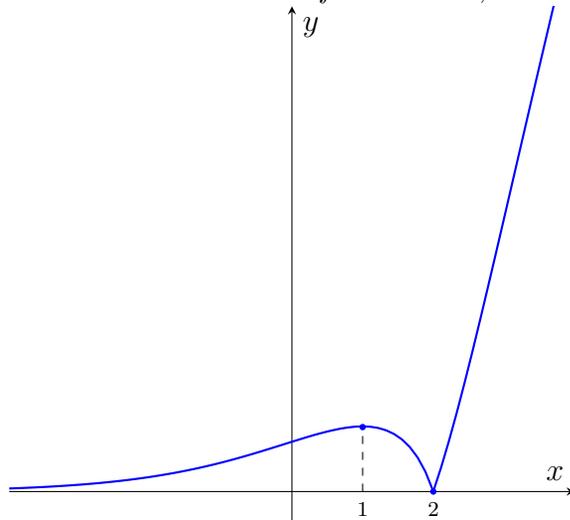
$$f'(x) = \begin{cases} -a \frac{e^{x-b}(1+x-b)}{1-(x-b)e^{x-b}}, & x < b, \\ a \frac{e^{x-b}(1+x-b)}{1+(x-b)e^{x-b}}, & x > b, \end{cases}$$

e poiché dalla continuità di f in un intorno di $x = b$ e dal teorema di Lagrange segue

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b^\pm} f'(x) = \pm a,$$

la f non è derivabile in $x = b$, dove il grafico di f avrà un punto angoloso. Infine è chiaro che se $x < b$ si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $1 + x - b < 0$, cioè $x < b - 1$, mentre $f'(x) < 0$ per ogni $x > b$, poiché allora $1 + x - b > 0$. Dunque f sarà crescente in $(-\infty, b - 1)$ e in $(b, +\infty)$, e decrescente in $(b - 1, b)$. Pertanto $x = b - 1$ è un punto di massimo relativo e $x = b$ un punto di minimo relativo. Il grafico di f con $a = 3$ e $b = 2$ è mostrato in fig. 1.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 3$, $b = 2$.



Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^{\alpha+3}} (a + \sin x)^{\alpha^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Soluzione. Poiché $\alpha^2 \geq 0$ e $a \geq 2$, la funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione, e bisogna quindi soltanto studiarla per $x \rightarrow +\infty$. Si ha allora, per la crescenza di $\arctan(ax)$,

$$\frac{\arctan(a)}{x^{\alpha+3}} (a-1)^{\alpha^2} \leq \frac{\arctan(ax)}{x^{\alpha+3}} (a + \sin x)^{\alpha^2} \leq \frac{\pi}{2x^{\alpha+3}} (a+1)^{\alpha^2}, \quad x \in [1, +\infty),$$

e poiché la funzione $\frac{1}{x^{\alpha+3}}$ è integrabile per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se $\alpha + 3 > 1$, si conclude, dal teorema del confronto, che anche l'integrale improprio considerato è convergente se e solo se $\alpha + 3 > 1$, cioè $\alpha > -2$. Per $\alpha = 0$ si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^3} dx &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \left[-\frac{1}{2x^2} \arctan(ax) \right]_1^r + \frac{a}{2} \int_1^r \frac{dx}{x^2(1+a^2x^2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \arctan a + \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{a}{2} \int_1^r \frac{dx}{x^2(1+a^2x^2)}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{1}{x^2(1+a^2x^2)} = \frac{1+a^2x^2 - a^2x^2}{x^2(1+a^2x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2},$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r \frac{dx}{x^2(1+a^2x^2)} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r \frac{dx}{x^2} - a^2 \int_1^r \frac{dx}{1+a^2x^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} - a \arctan(ax) \right]_1^r = -a \frac{\pi}{2} + 1 + a \arctan a. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^3} dx = \frac{1}{2}(1+a^2) \arctan a - \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{a}{2} = \begin{cases} \frac{5}{2} \arctan 2 - \pi + 1, & a = 2, \\ 5 \arctan 3 - \frac{9}{4}\pi + \frac{3}{2}, & a = 3, \\ \frac{17}{2} \arctan 4 - 4\pi + 2, & a = 4, \\ 13 \arctan 5 - \frac{25}{4}\pi + \frac{5}{2}, & a = 5. \end{cases}$$

Esercizio 4. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$ e centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{e^{\sin(x^2)}}{1 + ax^2}.$$

$[a = 3, -3, 2, -2]$

Soluzione. Dagli sviluppi

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

segue, per $x \rightarrow 0$,

$$e^{\sin(x^2)} = e^{x^2 + o(x^5)} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + o(x^5))^2 + o(x^5) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5).$$

Inoltre dallo sviluppo

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

si ottiene

$$\frac{1}{1+ax^2} = 1 - ax^2 + a^2x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin(x^2)}}{1+ax^2} &= \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) \left(1 - ax^2 + a^2x^4 + o(x^5)\right) \\ &= 1 + (1-a)x^2 + \left(\frac{1}{2} + a^2 - a\right)x^4 + o(x^5) = \begin{cases} 1 - 2x^2 + \frac{13}{2}x^4 + o(x^5), & a = 3, \\ 1 + 4x^2 + \frac{25}{2}x^4 + o(x^5), & a = -3, \\ 1 - x^2 + \frac{5}{2}x^4 + o(x^5), & a = 2, \\ 1 + 3x^2 + \frac{13}{2}x^4 + o(x^5), & a = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + ay' = e^{-ax} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

$[a = 2, -2, 3, -3]$

Soluzione. Introducendo la nuova funzione incognita $z := y'$ l'equazione diventa

$$z' + az = e^{-ax},$$

che è un'equazione del primo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea, la cui soluzione è

$$z(x) = e^{-ax} \int e^{ax} e^{-ax} dx = e^{-ax}(x + c), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Imponendo poi la condizione iniziale $z(0) = y'(0) = 0$ si ottiene $c = 0$. Pertanto, integrando per parti,

$$y(x) = \int z(x) dx = \int e^{-ax} x dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} x + \frac{1}{a} \int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \left(x + \frac{1}{a} \right) + c',$$

e imponendo la condizione iniziale $0 = y(0) = -\frac{1}{a^2} + c'$ si ricava $c' = \frac{1}{a^2}$, e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{1}{a} e^{-ax} x + \frac{1}{a^2} (1 - e^{-ax}), \quad x \in \mathbb{R}.$$