Svolgimento esame Gennaio - I

Esercizio 1

Svolgimento 1: Tenendo conto dello sviluppo, per $x \to 0$,

$$\operatorname{sen} x = x + o(x),$$

si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}(2\pi\sqrt{n^2+a}) &= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}(2\pi\sqrt{n^2+a} - 2\pi\sqrt{n^2}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(2\pi(\sqrt{n^2+a} - \sqrt{n^2})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{\cancel{n^2} + a - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+a} + \sqrt{n^2}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2+a} + \sqrt{n^2}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \frac{2\pi a}{\sqrt{1+\frac{a}{n^2}} + 1} + \frac{o(1/n)}{(1/n)}\right] \\
&= \pi a
\end{aligned}$$

Osservazione: nella penultima uguaglianza si è usato

$$o\left(\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2+a} + \sqrt{n^2}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Svolgimento 2: Usando anche lo sviluppo, per $x \to 0$,

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}(2\pi\sqrt{n^2+a}) &= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{a}{n^2}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(2\pi n\left(1 + \frac{a}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{\pi a}{n} + o(\tfrac{1}{n})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{n} + o(\tfrac{1}{n})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{\pi a}{n} + o(\tfrac{1}{n})\right) \\
&= \pi a.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Dominio, segno, intersezione con gli assi:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \qquad f(x) > 0 \quad \text{per } x > a, \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x = \pm a, \qquad f(0) = -a.$$

Asintoti: c'è uno stesso asintoto obliquo a $\pm\infty$ rappresentato da

$$y = mx + q, \qquad \text{con } m = 1 \quad \text{e } q = \frac{a}{3}.$$

Infatti:

$$m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2}}{x} = 1;$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2} - x \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} - 1\right] \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1-ay)(1+ay)^2} - 1}{y} \\ &\overset{H}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1}{3[(1-ay)(1+ay)^2]^{2/3}} \cdot [-a(1+ay)^2 + 2a(1+ay)(1-ay)] \\ &= \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Osserviamo che intersecando la funzione con il suo asintoto si trova un solo punto di intersezione, di ascissa $-\frac{7}{9}a$.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{3x-a}{(x-a)^{2/3}(x+a)^{1/3}} \qquad \text{per } x \neq \pm a.$$

Poiché

$$\lim_{x\to -a^{\pm}} f'(x) = \mp\infty,$$
$$\lim_{x\to a^{\pm}} f'(x) = +\infty,$$

possiamo dedurre dal teorema di de l'Hôpital che f non è derivabile in $\pm a$, che in $-a$ c'è una cuspide e in a c'è un punto a tangente verticale.
Inoltre

$$f'(x) > 0, \text{ quindi } f \text{ è crescente, sulle semirette } (-\infty, -a) \text{ e } (a/3, +\infty);$$
$$f'(x) < 0, \text{ quindi } f \text{ decrescente, per } x \in (-a, a/3);$$
$$f'(x) = 0, \text{ quindi un punto stazionario, per } x = \frac{a}{3}.$$

Possiamo dedurre allora che $x_m := \frac{a}{3}$ è un punto di minimo relativo. Osserviamo che x_m non è un punto di minimo assoluto perché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Grafico:

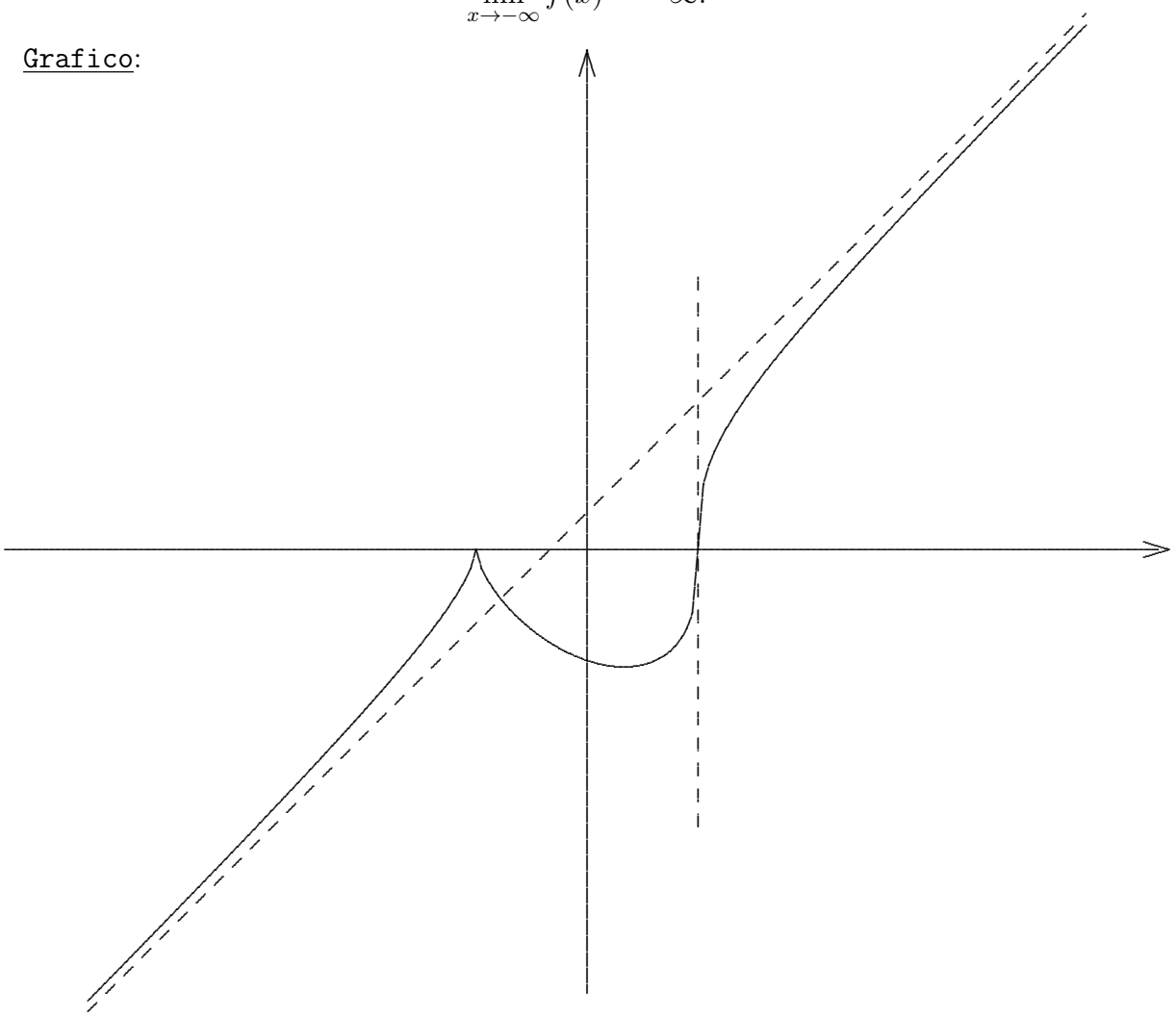

Figure 1: Tratteggiati l'asintoto obliquo e la tangente nel punto di ascissa $x = a$

Esercizio 3

Integrabilità in (un intorno di) 0: Detta f_α la funzione integranda, ed osservando che

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = -\frac{x^3}{6}\,\frac{2}{x^2}\,\frac{1+o(x^2)}{1+o(x)} = -\frac{1}{3}x\big(1+o(x)\big) = -\frac{1}{3}x + o(x)$$

risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{\left(\frac{2}{3}x\right)^\alpha \log x} = a > 0.$$

Per confronto asintotico, abbiamo allora che l'integrabilità in 0 della funzione f_α equivale all'integrabilità in 0 di $\left(\frac{2}{3}x\right)^\alpha \log x$, che è integrabile se e solo se $\alpha > -1$.

`Integrabilità in (un intorno di)` a: Siccome

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f_\alpha(x)}{\log\left(\frac{1}{a-x}\right)} = \left(\frac{a - \operatorname{sen} a}{\sqrt{1+a^2}-1}\right) \cdot (2a) \cdot 1 > 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e poiché

$$\int_0^a \log\left(\frac{1}{a-x}\right) dx = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{1}{y^2} \log y \, dy \quad \text{è un valore finito,}$$

possiamo concludere che f_α è integrabile in un intorno di a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Concludendo, **l'integrale proposto è convergente se e solo se** $\alpha > -1$.

`Calcolo per` $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^a (x+a) \log \frac{x}{a-x}\, dx \\
&= \lim_{c\to 0^+} \int_c^a (x+a)\log x \, dx - \lim_{c\to a^-} \int_0^c (x+a)\log(a-x)\, dx \\
&= \lim_{c\to 0^+} \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + ax\right)\log x - \frac{1}{4}x^2 - ax\right]_c^a \\
&\quad - \lim_{c\to a^-} \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 - ax + \frac{3}{2}a^2\right)\log(a-x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 3ax\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}a^2 \log a - \frac{5}{4}a^2 + \frac{7}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2 \log a \\
&= \frac{1}{2}a^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Risulta

- $\operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^5)$
- $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$
- $(\operatorname{sen} x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$

- $\log(1+\operatorname{sen}^2 x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)$
$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^5)$
- $\log(1+\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x^2 = \cancel{x^2} - \frac{5}{6}x^4 - \cancel{x^2} + o(x^5) = -\frac{5}{6}x^4 + o(x^5)$.

Nella penultima relazione abbiamo usato la proprietà

$$\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^3 = x^6\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)^3 = o(x^5).$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned}(x+a)^2\left[\log(1+\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x^2\right] &= (a^2 + 2ax + x^2)\left(-\frac{5}{6}x^4 + o(x^5)\right)\\ &= -\frac{5}{6}a^2x^4 - \frac{5}{3}ax^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Esercizio 5

Risolviamo l'equazione $z^2 + i\bar{z} = 1$. Gli altri testi proposti si svolgono in modo analogo.

Scritto $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i, \qquad i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai.$$

Quindi l'equazione proposta è verificata se

$$(a^2 - b^2) + (2ab)i + b + ai = 1,$$

ovvero, eguagliando parti reali e parti immaginarie dell'equazione, quando è verificato il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ 2ab + a = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata per $a = 0$ o per $b = -\frac{1}{2}$.
Se $a = 0$ la prima equazione diventa $b^2 - b + 1 = 0$, che *non* ha soluzioni reali (N.B. $b \in \mathbb{R}$).
Se $b = -\frac{1}{2}$ la prima equazione diventa $a^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, che ha soluzioni $a = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Le soluzioni del problema proposto sono allora:

$$z_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i.$$