Università di Roma "Tor Vergata – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 11/07/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [**8 punti**] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = be^{ax}(e^x - 1)^{1/3}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[a = \pm 1,\ b = \pm 1]$

Svolgimento:

Studiamo il caso $a = -1$, $b = 1$:

$$f(x) = e^{-x}(e^x - 1)^{1/3}.$$

`Dominio:` $\mathbb{R}$.

`Segno:` $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x = 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$.

`Asintoti:` si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$.
Non ci sono asintoti obliqui dato che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

`Intervalli di monotonia:` per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^{-x}\ (3 - 2\,e^x)}{3\,\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}} \qquad x \neq 0.$$

Quindi $f'(x) < 0$ per $x < \log\frac{3}{2}$ e $x \neq 0$ mentre $f'(x) < 0$ per $x > \log\frac{3}{2}$ e si ha $f'(\log\frac{3}{2}) = 0$.
Abbiamo allora che la funzione è monotona crescente nell'intervallo $(-\infty, \log\frac{3}{2})$ mentre è monotona decrescente in $(\log\frac{3}{2}, +\infty)$.

`Eventuali punti di massimo/minimo relativo:` Vi è un massimo relativo ed assoluto nel punto $x_M = \log\frac{3}{2}$, con $f(x_M) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

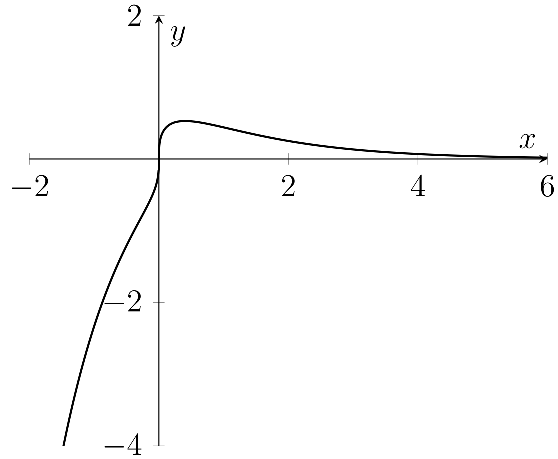
`Eventuali punti di non derivabilità:` possiamo calcolare $\lim_{x\to0^\pm} f'(x) = +\infty$, pertanto possiamo concludere che in $x = 0$ abbiamo un punto di non derivabilità con tangente verticale.

`Intervalli di concavità/convessità (anche se non richiesti):` per $x \neq 0$, si ha

$$\frac{4\,e^{2\,x}-15\,e^{x}+9}{9e^{x}\sqrt[3]{\left(e^{x}-1\right)^{2}}\,\left(e^{x}-1\right)},$$

studiandone il segno vediamo che la funzione è concava in $(-\infty,\log(3/4))\cup(0,\log 3)$ e convessa in $(\log(3/4),0)\cup(\log 3,\infty)$. Pertanto ha un flesso, a tangente verticale, in $x=0$ ed un altro, a tangente obliqua, in $x=\log 3$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a=-1$, $b=1$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2a}} \frac{x\ \operatorname{arcsen}\sqrt{1-ax}}{\sqrt{1-ax}}\, dx.$$

$[a = \pm 2, \pm 3]$

Svolgimento: In questo svolgimento poniamo I il valore dell'integrale proposto.
Operando la sostituzione $ax = t$, risulta

$$I = \frac{1}{a^2}\int_0^{1/2} \frac{t \operatorname{arcsen}\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}}\, dt.$$

Poniamo adesso $\sqrt{1-t} = s$ e troviamo

$$I = -\frac{2}{a^2}\int_1^{1/\sqrt{2}} (1-s^2) \operatorname{arcsen} s\, ds = \frac{2}{a^2}\int_{1/\sqrt{2}}^{1} (1-s^2) \operatorname{arcsen} s\, ds.$$

Sostituiamo $s = \operatorname{sen} y$, ovvero $y = \arcsin s$, ed otteniamo

$$I = \frac{2}{a^2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} y\left(1-\operatorname{sen}^2 y\right)\,\cos y\, dy.$$

Integriamo adesso per parti ed abbiamo

$$I = \frac{2}{a^2}\left\{\left[y\left(\operatorname{sen} y - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 y\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} y - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 y) dy\right\}.$$

Poiché

$$\int \operatorname{sen}^3 y\, dy = \int (1-\cos^2 y) \operatorname{sen} y\, dy = -\cos y + \tfrac{1}{3}\cos^3 y + c \qquad c \in \mathbb{R},$$

deduciamo

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{2}{a^2}\left[y\left(\operatorname{sen} y - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 y\right) + \cos y + \tfrac{1}{3}\left(-\cos y + \tfrac{1}{3}\cos^3 y\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \tfrac{2}{a^2}\left[\tfrac{\pi}{2}\left(1-\tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \tfrac{2}{a^2}\left[\tfrac{\pi}{3} - \left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{3}\right)\tfrac{5}{6\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2\,\bar{z}^{-1} + a\,\bar{z}\,z^{-1} = 0.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento:
Dato che $z = 0$ non è soluzione posso riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$z^2\,\bar{z}^{-1}(\bar{z}\,z^{-1})^{-1} = -a \quad \text{ovvero} \quad z^3\bar{z}^{-2} = -a.$$

Utilizzando la rappresentazione di Eulero per z, $z = \rho e^{\theta i}$, si ha

$$\rho e^{5\theta i} = -a,$$

da cui $\rho = a$ e $\theta_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{5}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Pertanto $z_k = ae^{\theta_k i}$, per $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge:

$$\int_a^{+\infty} \left(x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} \right)^\alpha dx.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: Osserviamo che la convergenza va verificata soltanto a $+\infty$. Inoltre, possiamo scrivere

$$x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt[a]{x}}(1 - \cos e^{-ax}).$$

Dato che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos e^{-ax}}{2e^{-2ax}} = 1,$$

per il principio del confronto asintotico ci possiamo ricondurre a studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è integrabile all'infinito la funzione $\left(\frac{1}{\sqrt[a]{x}} e^{-2ax} \right)^\alpha$.

Possiamo quindi concludere che se $\alpha > 0$ allora l'integrale converge mentre se $\alpha \leq 0$ allora l'integrale diverge.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [7 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 + \log(\cos x)}.$$

$[a = \pm 3, \pm 5]$

Svolgimento: Valutiamo in prima battuta l'andamento asintotico del numeratore e del denominatore e poi ne valutiamo il rapporto.

Numeratore: sviluppando il logaritmo per $x \to 0$,

$$\log(1+ax) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

quindi tenendo conto che $\operatorname{sen} t = t + o(t^2)$, per $t \to 0$, si ha

$$\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2) + o([ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2)]^2) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2).$$

Poiché

$$\cos ax = 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^3) = 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2)$$

e

$$e^{ax} = 1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = 1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

otteniamo

$$\text{numeratore} = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} - (1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2}) + o(x^2) = -\tfrac{3}{2}\,(ax)^2 + o(x^2).$$

Denominatore: osserviamo che per la gerarchia degli infiniti/infinitesimi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2}{x^p} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^p}{e^y}\operatorname{sen}\left(-\tfrac{1}{y}\right)^2 = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

quindi in particolare $e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 = o(x^2)$.
Inoltre

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\tfrac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Riassumendo:

$$\text{denominatore} = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Rapporto: dalle stime precedenti abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 + \log(\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\tfrac{3}{2}\,(ax)^2 + o(x^2)}{-\tfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tfrac{3}{2}\,(ax)^2}{\tfrac{x^2}{2}}\,\frac{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 3a^2.$$