Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 02/09/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$x^2 + e^{|x^2-a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 6z) = 5 \qquad \Big[z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 3z) = 2\Big].$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)^{n^2} \cdot \left(e^{-\frac{b}{a}n} + \frac{1}{n!}\right)$$

$[(a, b, c) = (2, 3, 3), (3, 2, 2), (4, 5, 3), (5, 4, 3)]$

Esercizio 5. [6 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{\log^2 a - \log^2 x}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^\alpha} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$x^2 + e^{|x^2-a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

[$a = (2, 3, 4, 5)$]

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. f pari. Risulta:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Risulta

$$f'(x) = 2x(1 - e^{a-x^2}) \text{ per } 0 \le x < \sqrt{a}, \qquad f'(x) = 2x(1 + e^{x^2-a}) \text{ per } x > \sqrt{a}.$$

Pertanto f è decrescente per $0 \le x \le \sqrt{a}$, f è crescente per $x \ge \sqrt{a}$.

$\boxed{x = 0 \text{ punto di massimo relativo, } x = \sqrt{a} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre:

$$f'_-(\sqrt{a}) = 0, \quad f'_+(\sqrt{a}) = 4\sqrt{a}.$$

$\boxed{x = \sqrt{a} \text{ punto angoloso.}}$

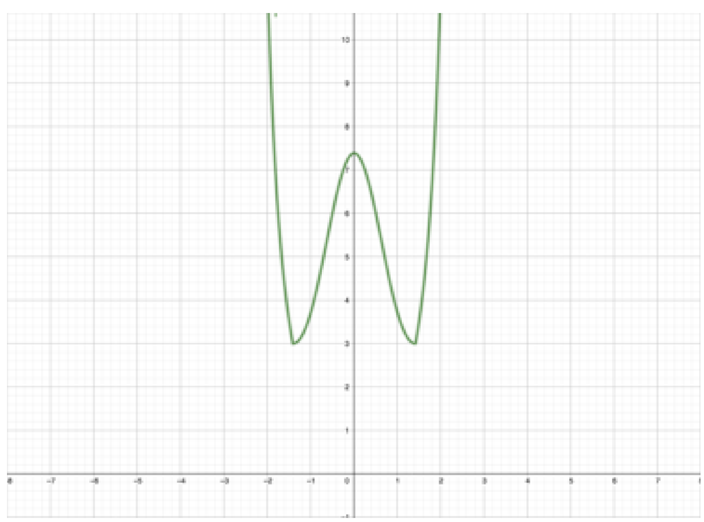

FIGURA 1. Grafico per $a = 2$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Integrando per parti:

$$\int \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}} dx = 2 \int \log x \left(\frac{1}{(3a-x)^{1/2}} \right)' dx = 2 \frac{\log x}{(3a-x)^{1/2}} - 2 \int \frac{1}{x(3a-x)^{1/2}} dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale: con la sostituzione $t = (3a-x)^{1/2}$

$$\int \frac{1}{x(3a-x)^{1/2}} dx = -\int \frac{2}{3a-t^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{3a}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{3a}-t} + \frac{1}{\sqrt{3a}+t} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a}+t}{\sqrt{3a}-t} \right) + c.$$

Pertanto si conclude:

$$\int \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}} dx = \frac{2 \log x}{(3a-x)^{1/2}} + \frac{2}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a}+(3a-x)^{1/2}}{\sqrt{3a}-(3a-x)^{1/2}} \right) + c$$

da cui segue

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}} dx = \frac{2 \log(2a)}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a}+\sqrt{a}}{\sqrt{3a}-\sqrt{a}} \right) - \frac{2 \log a}{\sqrt{2a}} - \frac{2}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}} \right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 6z) = 5 \qquad \left[z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 3z) = 2\right].$$

Svolgimento: Risolviamo l'equazione: $z^2 + \mathrm{Im}(z^2 + 6z) = 5$. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, si ha:

$$z^2+\mathrm{Im}(z^2+6z) = 5 \iff x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+\mathrm{Im}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+6x+6\mathrm{i}y) = 5 \iff x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+2xy+6y = 5$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 6y = 5 \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y^2 + 6y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x^2 = 5 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1, 5 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = \sqrt{5}, -\sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \sqrt{5}, \quad z = -\sqrt{5}, \quad z = \mathrm{i}, \quad z = 5\mathrm{i}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)^{n^2}\cdot\left(e^{-\frac{b}{a}n}+\frac{1}{n!}\right).$$

$[(a,b,c)=(2,3,3),(3,2,2),(4,5,3),(5,4,3)]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)&=\log\left(1+\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}\right)=\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}-\frac{b^2}{2a^2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)^{n^2}&=\exp\left(n^2\log\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)\right)=\exp\left(n^2\left(\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}-\frac{b^2}{2a^2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{b}{a}n+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+o(1)\right)\\&=e^{\frac{b}{a}n}e^{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}}(1+o(1)).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$e^{-\frac{b}{a}n}+\frac{1}{n!}=e^{-\frac{b}{a}n}(1+o(1)).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**6 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{\log^2 a - \log^2 x}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^\alpha} dx.$$

[$a = 5, 4, 3, 2$]

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim -\frac{\log^2 x}{a^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{a}{2}]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'altra parte, posto $y = a - x$,

$$f(x) = \frac{\log^2 a - \log^2(y+a)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{a+y}\right)^\alpha}.$$

Per $y \to 0^+$ risulta

$$\log^2(y+a) = \left(\log a + \log\left(1 + \frac{y}{a}\right)\right)^2 = \left(\log a + \frac{y}{a} + o(y)\right)^2 = \log^2 a + 2\frac{\log a}{a} y + o(y)$$

$$\sqrt{a+y} = \sqrt{a}\sqrt{1 + \frac{y}{a}} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{y}{2a} + o(y)\right) = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2a} y + o(y).$$

Pertanto

$$\frac{\log^2 a - \log^2(y+a)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{a+y}\right)^\alpha} \sim 2^{\alpha+1} a^{\frac{\alpha}{2}-1} \log a \, y^{1-\alpha} \text{ per } y \to 0^+.$$

Si deduce che

$$f(x) \sim 2^{\alpha+1} a^{\frac{\alpha}{2}-1} \log a \, (a-x)^{1-\alpha} \text{ per } x \to a^-.$$

Pertanto f è integrabile in $[\frac{a}{2}, a)$ se e solo se $\alpha < 2$. Segue che f è integrabile in $(0, a)$ se e solo se $\alpha < 2$.