Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/06/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
L **Esame orale**:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. **[6 punti]** Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)\left(a\sqrt{1+x^2}+(4a-9)x+\left(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right).$$

$[a=2,4,5,6]$

Svolgimento: Per $x\to-\infty$

$$a\sqrt{1+x^2}=a|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=-ax\left(1+\tfrac{1}{2x^2}-\tfrac{1}{8x^4}+o(\tfrac{1}{x^4})\right)=-ax-\tfrac{a}{2x}+\tfrac{a}{8x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})$$

$$(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2})\sin(\tfrac{1}{x})=(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2})\left(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{6x^3}+\tfrac{1}{120x^5}+o(\tfrac{1}{x^5})\right)=3(3-a)x+\tfrac{a}{2x}-\tfrac{a+7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})$$

Perciò

$$(x^3+1)\left(a\sqrt{1+x^2}+(4a-9)x+\left(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)=(x^3+1)\tfrac{4a-7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})\to\tfrac{4a-7}{40}$$

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. [**8 punti**] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{e^{-|x+b|}+1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità e eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[(a,b) = (1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)]$

Svolgimento: Il dominio è dom$f = \mathbb{R}$ e la funzione è continua in $\mathbb{R}$. Per $a > 0$ si ha $\frac{a}{2} = f(-b) \leq f(x) < a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, se $a > 0$, $-b$ è un punto di minimo assoluto. Analogamente, per $a < 0$ si ha $a < f(x) \leq \frac{a}{2} = f(-b)$. In particolare, se $a < 0$, $-b$ è un punto di massimo assoluto assoluto.

In entrambi i casi il grafico della funzione non interseca l'asse x. Il punto di intersezione con l'asse y è

$$(0, f(0)) = \left(0, \frac{a}{e^{-|b|}+1}\right).$$

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$$

e quindi la retta di equazione $y = a$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to \pm\infty$. Essendo la funzione continua su $\mathbb{R}$ non ci sono asintoti verticali.
La funzione è chiaramente derivabile in $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$ e la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{ae^{-|x+b|}}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^2} & \text{per} \quad x > -b \\ \frac{-ae^{-|x+b|}}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^2} & \text{per} \quad x < -b \end{cases}$$

Quindi, per $a > 0$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-b, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -b)$. Quindi f è strettamente decrescente per in $(-\infty, -b)$ e strettamente crescente in $(-b, +\infty)$. Come già osservato $-b$ è un punto di minimo assoluto e non ci sono altri punti di estremo locale.

Analogamente, per $a < 0$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-b, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -b)$. Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, -b)$ e strettamente decrescente in $(-b, +\infty)$. Come già osservato $-b$ è un punto di massimo assoluto e non ci sono altri punti di estremo locale.
Si ha inoltre

$$f'_+(-b) = \frac{a}{4} \quad \text{e} \quad f'_-(-b) = -\frac{a}{4} \neq f'_+(-b).$$

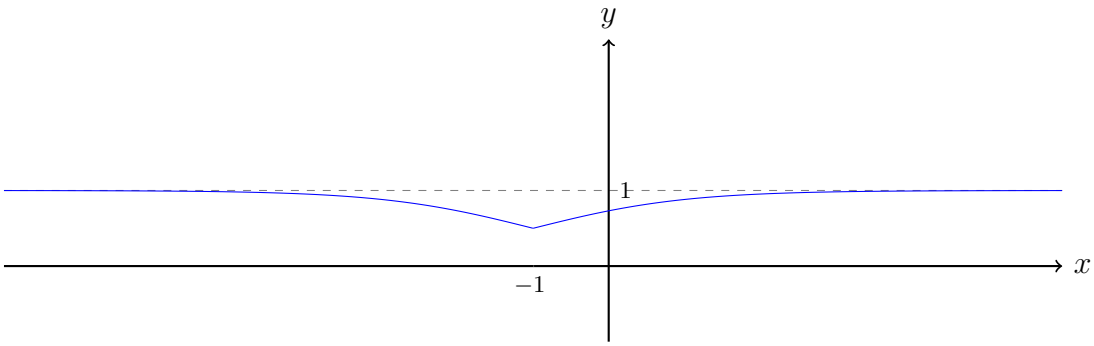
Quindi la funzione non è derivabile $-b$ e $-b$ è un punto angoloso.

La f'(x) è chiaramente derivabile in $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$ e la sua derivata è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{ae^{-|x+b|}\left(e^{-|x+b|}-1\right)}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^3} & \text{per} \quad x > -b \\ \frac{ae^{-|x+b|}\left(e^{-|x+b|}-1\right)}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^3} & \text{per} \quad x < -b \end{cases}$$

Quindi, se $a > 0$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$. Quindi f è strettamente concava in $(-\infty, -b)$ e in $(-b, +\infty)$. Non ci sono punti di flesso. Si noti che f non è concava in $\mathbb{R}$ ad esempio perché, per $a > 0$, si ha $f'_+(-b) > \quad f'_-(-b)$.
Analogamente, se $a < 0$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$. Quindi f è strettamente convessa in $(-\infty, -b)$ e in $(-b, +\infty)$. Non ci sono punti di flesso. Inoltre f non è convessa in $\mathbb{R}$.

Riportiamo qui sotto il grafico di f per $(a, b) = (1, 1)$.


y
1
x
−1

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a,b) = (2,2), (3,4), (4,5), (5,6)]$

Svolgimento: In tutti i casi abbiamo $b \geq a \geq 2$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua in $(0, +\infty)$. Basta quindi studiare la convergenza a $+\infty$ e la convergenza in (un intorno destro di) 0.
Studiamo prima la convergenza a $+\infty$. Si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{x^{b\alpha+3}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, si ha convergenza a $+\infty$ se e solo se $b\alpha + 3 > 1$ ossia se e solo se $\alpha > -\frac{2}{b}$.
Studiamo ora la convergenza in 0. Si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2} \sim \frac{x^\alpha}{a^2} \quad \text{per} \quad x \to 0^+$$

e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, si ha convergenza in 0 se e solo se $\alpha > -1$.

Riassumendo, visto che $b \geq 2$ e quindi $-1 \leq -\frac{2}{b}$, l'integrale improprio è convergente se e solo se $\alpha \in \left(-\frac{2}{b}, +\infty\right)$.

Passiamo ora al calcolo per $\alpha = 0$. In questo caso l'integrale è convergente perché $0 \in \left(-\frac{2}{b}, +\infty\right)$. Dobbiamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\, dx.$$

Ricordando che $a \neq 1$, dalla teoria sappiamo che vale l'identità

$$\frac{1}{(x+1)(x+a)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+a} + \frac{D}{(x+a)^2}$$

per opportune costanti reali A, B, D. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+a} + \frac{D}{(x+a)^2} &= \frac{A(x+a)^2 + B(x+1)(x+a) + D(x+1)}{(x+1)(x+a)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2Aa + Ba + B + D)x + Aa^2 + Ba + D}{(x+1)(x+a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2aA + (a+1)B + D = 0 \\ a^2A + aB + D = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{1}{(a-1)^2}$, $B = -\frac{1}{(a-1)^2}$, $D = -\frac{1}{a-1}$. Quindi

$$\frac{1}{(x+1)(x+a)^2} = \frac{1}{(a-1)^2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a} - \frac{a-1}{(x+a)^2}\right)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log|x+1| - \log|x+a| + \frac{a-1}{x+a}\right) + C \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log\left|\frac{x+1}{x+a}\right| + \frac{a-1}{x+a}\right) + C\,.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx &= \lim_{s\to+\infty}\int_0^s \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx \\ &= \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{(a-1)^2}\left(\log\left|\frac{as+a}{s+a}\right| + \frac{a-1}{s+a} - \frac{a-1}{a}\right) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log a - \frac{a-1}{a}\right)\,.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 4. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = axy\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} \\ y(0) = -b \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a,b) = (3,5),(4,4),(5,3),(6,2)]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{y} = a\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c = \log(-y) + c.$$

Risolviamo il secondo integrale per parti:

$$\int x\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \frac{1}{2}\int x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}\Big)'dx = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\tan x + c.$$

Pertanto

$$\log(-y) = \frac{a}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{a}{2}\tan x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -b$ si ottiene $c = \log b$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -b\exp\Big(\frac{a}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{a}{2}\tan x\Big).$$

L'intervallo di definizione della soluzione è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z\left(|z|^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\mathrm{i}\bar{z}|z|.$$

$[a=5,4,3,2]$

Svolgimento: $z=0$ è soluzione dell'equazione. Per $z\neq 0$, si ponga $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$, $\rho>0$ e sostituendo nell'equazione

$$\rho e^{\mathrm{i}\theta}\left(\rho^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\mathrm{i}\rho^2 e^{-\mathrm{i}\theta}\iff e^{\mathrm{i}\theta}\left(\rho^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\rho e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\theta)}.$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases}\rho^2+\dfrac{1}{a^2}=2\rho\\ \theta=\dfrac{\pi}{2}-\theta+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\iff\begin{cases}\rho=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-1}}{a}\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z=0,\quad z=\frac{a\pm\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}a}(1+\mathrm{i}),\quad z=-\frac{a\pm\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}a}(1+\mathrm{i}).$$