Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17/6/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a\log(e^{|x-b|} - x + b)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[(a,b) = (1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)]$

Svolgimento: Si ha $f(x) = ag(x-b)$ con $g(x) = \log(e^{|x|} - x)$ e $a = \pm 1$, quindi basta studiare g e poi traslarne a destra il grafico di b, ed eventualmente rifletterlo rispetto all'asse x, per ottenere il grafico di f.
Dominio. Il dominio di g è $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^{|x|} > x\}$. Per ogni $x < 0$ si ha chiaramente $e^{|x|} > 0 > x$, mentre per $x \geq 0$ consideriamo la funzione $h(x) = e^x - x$: essendo

$$h'(x) = e^x - 1 \geq 0,$$

si ha che h è crescente in $[0, +\infty)$ e dunque $h(x) = e^x - x \geq h(0) = 1 > 0$, per ogni $x \geq 0$. Si conclude allora che $D_f = D_g = \mathbb{R}$.
Asintoti. Essendo chiaramente g continua in $D_g = \mathbb{R}$, non ci sono asintoti verticali. Si ha poi

$$g(x) = \log(e^{|x|}(1 + xe^{-|x|})) = |x| + o(1) \qquad \text{per } x \to \pm\infty,$$

e dunque g ha come asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ le rette di equazione $y = \pm x$, e f ha asintoti obliqui $y = \pm a(x-b)$ per $x \to \pm\infty$.
Derivabilità e derivata. Per $x \neq 0$ si ha

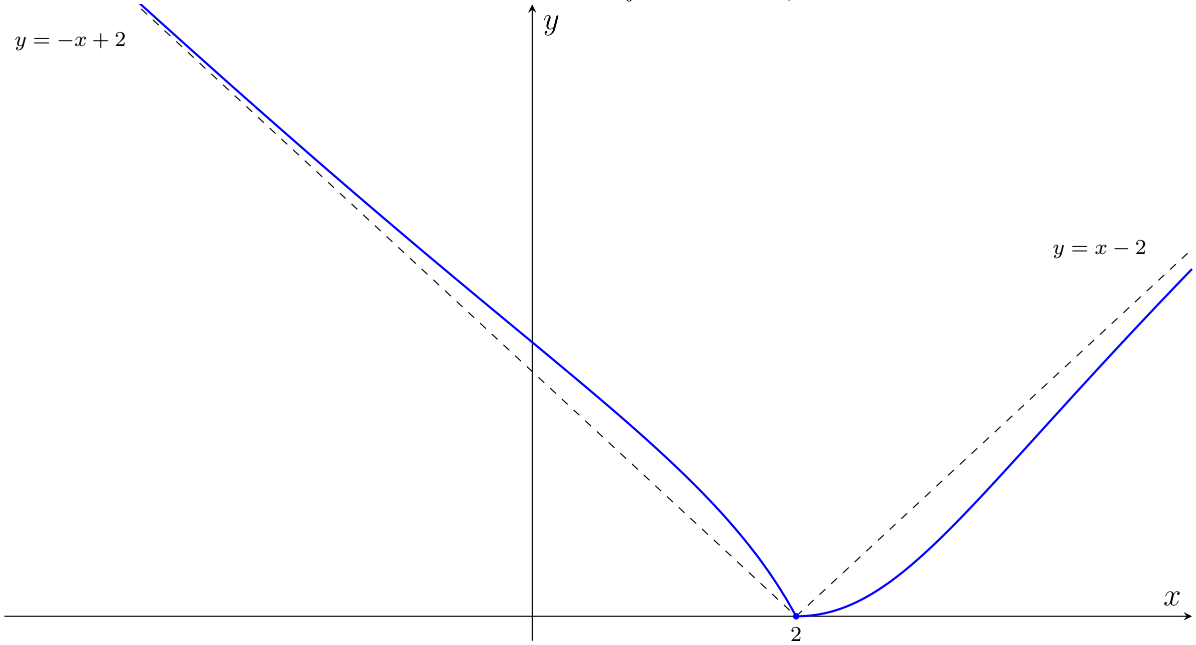
$$g'(x) = \frac{e^{|x|}\frac{x}{|x|} - 1}{e^{|x|} - x} = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x - x} & x > 0, \\ -\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}+x} & x < 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} a\frac{e^{x-b}-1}{e^{x-b}-x+b} & x > b, \\ -a\frac{e^{b-x}+1}{e^{b-x}-x+b} & x < b. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^\pm} g'(x) = \pm 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to b^+} f'(x) = 0, \quad \lim_{x\to b^-} f'(x) = -2a,$$

quindi f non è derivabile in $x = b$ (punto angoloso).
Monotonia e punti estremali. Si ha, come visto studiando il dominio, $e^{|x|} - x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre se $x > 0$ allora $e^x - 1 > 0$ e quindi $g'(x) > 0$, mentre $e^{-x} + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque $g'(x) < 0$ per $x < 0$. Quindi f è decrescente in $(-\infty, b)$ e crescente in $(b, +\infty)$ e $x = b$ è l'unico punto estremale che è il minimo assoluto.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 1$, $b = 2$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\alpha+3} x}{\cos^{a\alpha}(x)(b - \cos x)(\cos^2 x + 1)} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a, b) = (4, 3), (3, 4), (2, 5), (5, 2)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Convergenza. Si ha in tutti i casi $b > 1$ pertanto il denominatore si può annullare solo per $x = \pi/2$. Bisogna dunque studiare la convergenza dell'integrale solo agli estremi. Detta f_α la funzione integranda, avendosi $\sin x \sim x$ e $\cos x \to 1$ per $x \to 0^+$, si ha

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{\alpha+3}}{2(b-1)} = \frac{1}{2(b-1)} \frac{1}{x^{-\alpha-3}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e dunque l'integrale converge in $x = 0$ se e solo se $-\alpha - 3 < 1$, cioè $\alpha > -4$. Per $x \to \frac{\pi}{2}$ si ha poi $\sin x \to 1$, e $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) \sim \frac{\pi}{2} - x$, da cui

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{b(\frac{\pi}{2} - x)^{a\alpha}}$$

e dunque l'integrale converge in $x = \frac{\pi}{2}$ se e solo se $a\alpha < 1$, cioè $\alpha < 1/a$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-4 < \alpha < 1/a$.
Calcolo per $\alpha = 0$. Facendo il cambiamento di variabile $t = \cos x$ ed eseguendo la scomposizione in fratti semplici dell'integrando risultante dalla sostituzione, l'integrale dato diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^2 - 1}{(t-b)(t^2+1)} dt &= \frac{1}{b^2+1} \int_0^1 \left[\frac{b^2 - 1}{t - b} + 2\frac{t + b}{t^2 + 1} \right] dt \\
&= \frac{1}{b^2+1} \left[(b^2 - 1) \log|t - b| + \log(t^2 + 1) + 2b \arctan t \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{b^2+1} \left[(b^2 - 1) \log\left(\frac{b-1}{b} \right) + \log 2 + b\frac{\pi}{2} \right].
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[5 punti]** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\cos^2 y}{a^2 - x^2}, \\ y(2a) = \pi, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = 4, 5, 2, 3]$

Svolgimento: Equazione a variabili separabili definita per $x \neq \pm a$ e con soluzioni stazionarie $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In base alle condizioni iniziali l'intervallo massimale di esistenza I è contenuto in $(a, +\infty)$ e $y(x) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ per ogni $x \in I$. Separando le variabili si ottiene

$$\tan y = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x} \right] = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x + a}{x - a} \right) + c.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha $c = -\frac{1}{2a} \log 3$, e quindi la soluzione si ottiene risolvendo per y l'equazione

$$\tan y = \frac{1}{2a} \log \frac{x + a}{3(x - a)}.$$

Tenendo allora conto che il codominio dell'arcotangente è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, mentre si deve avere, come detto sopra, $y(x) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ per ogni $x \in I$, si vede che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \arctan \left(\frac{1}{2a} \log \frac{x + a}{3(x - a)} \right) + \pi,$$

con intervallo massimale di esistenza $I = (a, +\infty)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [7 punti] Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^{ax} - x^{\sin ax}}{x^3 \log x}.$$

$[a = 5, 2, 3, 4]$

Svolgimento: Basta sviluppare il numeratore a meno di $o(x^3 \log x)$. Si ha

$$(\sin x)^{ax} - x^{\sin ax} = e^{ax \log(\sin x)} - e^{\sin ax \log(x)}$$

Inoltre, usando lo sviluppo $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$,

$$\sin(ax) \log x = \left(ax - \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3)\right) \log x = ax \log x - \frac{a^3x^3}{6} \log x + o(x^3 \log x),$$

da cui, usando anche $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$,

$$\begin{aligned} e^{\sin ax \log x} &= e^{ax \log x - \frac{a^3x^3}{6} \log x + o(x^3 \log x)} \\ &= 1 + ax \log x - \frac{a^3x^3}{6} \log x + \frac{1}{2} a^2x^2 \log^2 x + \frac{1}{6} a^3x^3 \log^3 x + o(x^3 \log x). \end{aligned}$$

Analogamente, grazie anche allo sviluppo $\log(1 + t) = t + o(t)$ per $t \to 0$,

$$\begin{aligned} ax \log(\sin x) &= ax \log\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = ax \left[\log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right] \\ &= ax \left(\log x - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = ax \log x + o(x^3 \log x), \end{aligned}$$

e pertanto

$$e^{ax \log(\sin x)} = 1 + ax \log x + \frac{1}{2} a^2x^2 \log^2 x + \frac{1}{6} a^3x^3 \log^3 x + o(x^3 \log x).$$

Il numeratore si scrive dunque come

$$e^{ax \log(\sin x)} - e^{\sin ax \log x} = \frac{a^3x^3}{6} \log x + o(x^3 \log x)$$

e il limite richiesto è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{a^3}{6} x^3 \log x + o(x^3 \log x)}{x^3 \log x} = \frac{a^3}{6}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z-1)^2 = -a - 2|z|$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Scrivendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione data equivale al sistema

$$\begin{cases} (x-1)^2 - y^2 = -a - 2\sqrt{x^2+y^2}, \\ 2\,(x-1)\,y = 0. \end{cases}$$

La soluzione $y = 0$ della seconda equazione non è accettabile, poiché sostituita nella prima implica $(x-1)^2 = -a - 2|x| < 0$ che è impossibile. La soluzione $x = 1$ della seconda equazione, sostituita nella prima, porge $y^2 = a + 2\sqrt{1+y^2}$, da cui $y^2 \geq a$, e, portando la a a primo membro, elevando al quadrato, e riordinando,

$$(*) \qquad y^4 - 2(a+2)y^2 + a^2 - 4 = 0.$$

Poiché allora

$$a + 2 - 2\sqrt{a+2} \geq a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a+2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq a \leq -1,$$

le uniche soluzioni della $(*)$ che soddisfino la condizione $y^2 \geq a$ sono tali che

$$y^2 = a + 2 + 2\sqrt{a+2},$$

e quindi

$$y = \pm\sqrt{a + 2 + 2\sqrt{a+2}}.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono dunque

$$z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{a + 2 + 2\sqrt{a+2}}.$$