Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27 gennaio 2025 – I turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$\frac{a|\log x|}{a|\log x| + 1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali flessi. È richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Svolgimento: Dominio: $\{x > 0\}$. Risulta:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0, \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1.$$

$\boxed{x = 1 \text{ asintoto orizzontale a } +\infty.}$

Risulta

$$f'(x) = -\frac{a}{x(a\log x - 1)^2} \text{ per } 0 < x < 1, \qquad f'(x) = \frac{a}{x(a\log x + 1)^2} \text{ per } x > 1.$$

Pertanto f è decrescente per $0 < x \leq 1$, f è crescente per $x \geq 1$.

$\boxed{x = 1 \text{ punto di minimo assoluto.}}$

Inoltre:

$$f'_-(1) = -a, \quad f'_+(1) = a, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

$\boxed{x = 1 \text{ punto angoloso, } x = 0 \text{ punto di cuspide.}}$

Risulta:

$$f''(x) = a\frac{a\log x - 1 + 2a}{x^2(a\log x - 1)^3} \text{ per } 0 < x < 1, \qquad f''(x) = a\frac{-a\log x - 1 - 2a}{x^2(a\log x + 1)^3} \text{ per } x > 1.$$

Pertanto f è convessa per $0 < x \leq e^{\frac{1}{a}-2}$, f è concava per $e^{\frac{1}{a}-2} \leq x \leq 1$ e $x \geq 1$.

$\boxed{x = e^{\frac{1}{a}-2} \text{ punto di flesso.}}$

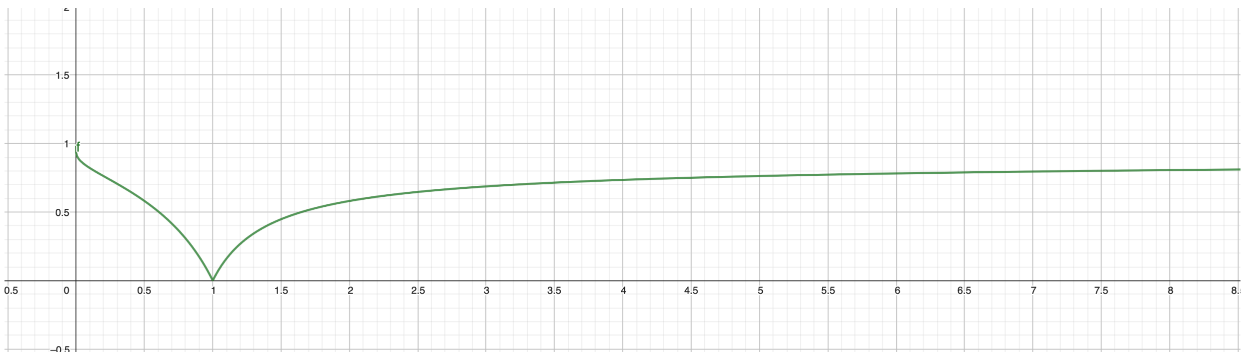

FIGURA 1. Grafico per $a = 2$

.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[7 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{a-x-y}}{\sqrt{e^x - 1}} \\ y(\log 2) = a - \log 2 \end{cases}.$$

Non è richiesto l'intervallo massimale di esistenza.

$[a = 5, 6, 2, 4]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int e^y dy = \int \frac{e^{a-x}}{\sqrt{e^x-1}} dx$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int e^y dy = e^y + c.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{e^{a-x}}{\sqrt{e^x-1}} dx = e^a \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^x-1}} dx.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{e^x - 1}$ e integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{a-x}}{\sqrt{e^x-1}} dx &= 2e^a \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = 2e^a \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{(t^2+1)^2} \right) dt \\ &= 2e^a \arctan t + e^a \int t \left(\frac{1}{t^2+1} \right)' dt \\ &= e^a \arctan t + e^a \frac{t}{t^2+1} + c = e^a \arctan \sqrt{e^x - 1} + e^a \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$e^y = e^a \arctan \sqrt{e^x-1} + e^a \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\log 2) = a - \log 2$ si ottiene $c = -e^a \frac{\pi}{4}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = a + \log \left(\arctan \sqrt{e^x-1} + \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$|z|^2(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}a\bar{z} = 0.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: L'equazione può essere riscritta nella forma:

$$|z|^2(1+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}a\bar{z}.$$

Uguagliando i moduli di ambo i membri si ha:

$$\sqrt{2}|z|^2 = a|z| \Longleftrightarrow |z| = 0, \ \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$z = 0$ è soluzione dell'equazione. Si deduce che le eventuali soluzioni non nulle sono della forma $z = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\theta}$ da cui, sostituendo nell'equazione

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}$$

da cui segue

$$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = e^{-\mathrm{i}(\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

Pertanto

$$\frac{\pi}{4} = -\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$\theta = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 0, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$$

ovvero

$$z = 0, \quad z = -\frac{a}{2} - \mathrm{i}\frac{a}{2}.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n}\,\log(n+a) - n}{\log^2(n+b)} n.$$

$[(a,b) = (5,4), (4,5), (3,2), (2,3)]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n}\left(n - \log(n+a)\right) - n &= e^{\frac{\log n}{n}}\left(n - \log n - \log\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) - n \\
&= \left(1 + \frac{\log n}{n} + \frac{\log^2 n}{2n^2} + o\Big(\frac{\log^2 n}{2n^2}\Big)\right)\left(n - \log n - \frac{a}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) - n \\
&= \left(n - \frac{\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big)\right) - n = -\frac{\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big).
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\log^2(n+b) = \log^2 n + o(\log^2 n).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{1}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**6 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(e^{ax} - e^{-ax})}{1 + x^{|\alpha|}} dx.$$

$[a = 4, 3, 5, 2]$

Svolgimento: Per $x \to 0^+$ risulta:

$$\log(e^{ax} - e^{-ax}) = \log(1 + ax + o(x) - (1 - ax + o(x)) = \log(2ax + o(x)) = \log x + o(\log x)$$

da cui segue

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{\log x}{2} & \text{se } \alpha = 0 \\ \log x & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, 1]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'altra parte per $x \to +\infty$ si ha

$$\log(e^{ax} - e^{-ax}) = \log(e^{ax}(1 - e^{-2ax})) = ax + \log(1 - e^{-2ax})) = ax + o(x)$$

da cui segue

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{ax}{2} & \text{se } \alpha = 0 \\ ax^{1-|\alpha|} & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Pertanto f è integrabile in $[1, +\infty)$ se e solo se $|\alpha| > 2$.
Segue che f è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $|\alpha| > 2$.