Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n - e\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right)\right]$$

$[a = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n+a}\right) &= \log\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2a}{n^3}\right)+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a+\frac{1}{2}}{n^2}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Dunque

$$\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n+a})} = e^{1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e\left(1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Essendo infine $\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right) = 1-\frac{2a+1}{2n}+\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} en^2\left(\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}-\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{16a^2+16a+5}{12}e.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}(\log^2 x - a^2)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}]$

Svolgimento: Dominio: $\{x > 0\}$. Risulta

$$f(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq e^{-a} \text{ e } x \geq e^{a}, \quad f(x) = 0 \iff x = e^{-a}, e^{a}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x - a^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\log^2 x + 4\log x - a^2}{2\sqrt{x}},$$

pertanto f è crescente per $0 < x \leq e^{-2-\sqrt{4+a^2}}$ e $x \geq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$, e f è decrescente per $e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \leq x \leq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$.

$\boxed{x = e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di massimo relativo, } x = e^{-2+\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$\boxed{x = 0 \text{ punto di cuspide.}}$

Per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{8 + a^2 - \log^2 x}{4\sqrt{x}},$$

pertanto f è concava per $0 < x \leq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e $x \geq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e f è convessa per $e^{-\sqrt{8+a^2}} \leq x \leq e^{\sqrt{8+a^2}}$.

$\boxed{x = e^{-\sqrt{8+a^2}},\ x = e^{\sqrt{8+a^2}} \text{ punti di flesso.}}$

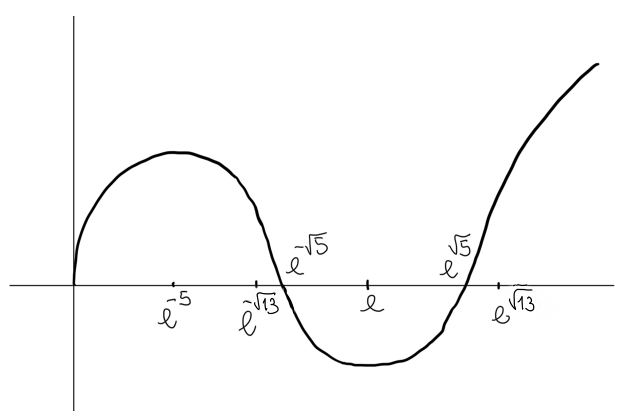

FIGURE 1. Grafico per $a = \sqrt{5}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha-1}(1+x)^2}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 2$.

$[a = 2, 3]$

Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha+1}(1+x)^2}\, dx$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 4, 5]$

Svolgimento: Consideriamo il primo testo, con $a = 2$. Chiamiamo f_α la funzione integranda.

Studio della convergenza dell'integrale improprio

- Nell'eventuale polo 0 abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}} = -2,$$
quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, ovvero $\alpha < \frac{5}{2}$.
- A $+\infty$ abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-1+2-\frac{3}{2}}}} = c \in (0, +\infty),$$
quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, ovvero $\alpha > \frac{3}{2}$.

Riassumendo, c'è convergenza se e solo se $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$.

Calcolo dell'integrale per $\alpha = 2$

Con il cambio di variabile $x^{1/2} = t$ si ha

$$I := \int_0^\infty \frac{x^{3/2} - 2x^{1/2}}{x(1+x)^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{t^3 - 2t}{t^2(1+t^2)^2}\, 2t\, dt = 2\int_0^\infty \frac{t^2-2}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Utilizzando il metodo di Hermite, cerchiamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2-2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Eseguendo i conti al lato destra dell'uguaglianza, siamo condotti a verificare

$$t^2 - 2 = At^3 + (B-C)t^2 + (A-2D)t + B + C,$$

ed eguagliando i coefficienti troviamo $A = D = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$.

Quindi l'integrale proposto diventa:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{c\to\infty} \left\{ 2\int_0^c -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt + \left[2\left(-\frac{3}{2}\right)\,\frac{t}{1+t^2}\right]_0^c \right\} \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\operatorname{arctg} t - 3\frac{t}{1+t^2}\right]_0^c \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\operatorname{arctg} c - 3\frac{c}{1+c^2}\right] \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che in alternativa al metodo di Hermite, si può calcolare l'integrale proposto nel seguente modo:

$$\int \frac{t^2-2}{(1+t^2)^2}\,dx = \int \left[-2\,\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + 3\,\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right] dt = -2\operatorname{arctg} t + 3\left(-\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} t\right) + c,$$

dove abbiamo utilizzato la nota soluzione per parti

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,t\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+t^2}\,t + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\sin x = b\cos^2 x \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a,b) = (2,5),(3,4),(4,3),(6,2)]$

Svolgimento: La soluzione y_h dell'equazione omogenea associata è:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin(x)dx \iff \ln|y| = -\cos(x) + k \iff y_h(x) = c\exp(-\cos(x)).$$

Per determinare la soluzione generale $y(x)$ useremo il metodo della variazione delle costanti per avere

$$y(x) = c(x)\exp(-\cos(x)),$$

con

$$c'(x) = b\cos^2(x)\sin(x)\exp(\cos(x)).$$

Con una doppia integrazione per parti otteniamo quindi

$$y(x) = c\exp(-\cos(x)) - b(\cos^2(x) - 2\cos(x) + 2) \quad x \in \mathbb{R},$$

con costante $c = a + 2b$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} w - z = \overline{z} \\ wz^2 = a\overline{w} \end{cases} .$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento:

Dalla prima equazione risulta $w = z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$, per cui deduciamo che w è un numero reale.

Quindi la seconda equazione è soddisfatta da:

- $w = 0$, che inserito nella prima equazione dice $\mathrm{Re}\,z = 0$ ed abbiamo le soluzioni
$$\begin{cases} z = y\,i & \quad y \in \mathbb{R} \\ w = 0. \end{cases}$$
- $w \neq 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}$, che inserito nella prima equazione dà $w = \pm 2\sqrt{a}$. Abbiamo allora le ulteriori soluzioni
$$\begin{cases} z = \sqrt{a} \\ w = 2\sqrt{a}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\sqrt{a} \\ w = -2\sqrt{a}. \end{cases}$$