

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27 gennaio 2025

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Titolare del corso:
Sessione per l'orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

R

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a + b\sqrt[3]{x^4 - x^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

$$[(a, b) = (3, 2), (2, -3), (-3, 2), (-1, -4)]$$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{2b}^{+\infty} \frac{\log ax}{\sqrt{(x-b)^3}} dx.$$

$$[(a, b) = (5, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2)]$$

Esercizio 3. [6 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$[A] \quad z^2(4 - |z^2|) = 5i.$$

$$[B] \quad z^2(|z^2| - 2) = 3i.$$

$$[C] \quad z^2(2 - |z^2|) = 3i.$$

$$[D] \quad z^2(|z^2| - 4) = 5i.$$

Esercizio 4. [5 punti] Scrivere lo sviluppo di Maclaurin al IV ordine di

$$f(x) = \frac{1}{\log(a + x^2)}.$$

$$[a = 4, 5, 2, 3]$$

Esercizio 5. [7 punti] Dopo aver trovato la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\cosh y}{\sinh y} \frac{\cos x}{\sin x} \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A, \end{cases}$$

trovarne l'intervallo massimale di esistenza.

$$[A = 2, 3, 4, 5 \text{ e seni e coseni permutati (quando c'è il coseno al denominatore si parte da } -\pi)]$$

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a + b\sqrt[3]{x^4 - x^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.

$$[(a, b) = (3, 2), (2, -3), (-3, 2), (-1, -4)]$$

Svolgimento: Considereremo qui il caso $(a, b) = (3, 2)$.

Osserviamo preliminarmente che la funzione è pari, quindi il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

- **Dominio:** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, infatti non c'è nessuna limitazione nei domini delle funzioni che compongono f .
- **Asintoti:**
 - poiché la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, non vi sono asintoti verticali.
 - $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoti orizzontali.
 - $f(x) = 3 + x^{4/3}(2 + o(1))$ implica che f non abbia asintoti obliqui, in quanto sopralineare all'infinito (ovvero $|f(x)/x| \rightarrow \infty$ per $|x| \rightarrow \infty$).
- **Studio della derivata:** risulta

$$(1) \quad f'(x) = \frac{4x(2x^2-1)}{3[x^2(x^2-1)]^{2/3}} \quad x \neq 0, x \neq \pm 1.$$

Lo studio del segno di f' ci dice che la funzione è crescente in $[-1/\sqrt{2}, 0]$ ed in $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e decrescente negli altri intervalli. Abbiamo allora anche che $f(\pm 2^{-1/2}) = 3 - 2^{1/3}$ è il minimo assoluto della funzione, mentre l'estremo superiore della funzione si deduce essere $+\infty$ dallo studio sugli asintoti.

- **Punti di non derivabilità:** nei valori $x = 0$ e $x = \pm 1$ non possiamo applicare le regole di derivazione per funzioni composte, che ci ha permesso di ricavare (1). Facendo un'analisi via rapporto incrementale, o via limite della derivata trovata (i.e. usando il teorema di de l'Hôpital), otteniamo che non esiste derivata in tali punti. Più precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) &= \mp \infty \quad \Rightarrow \quad 0 \text{ è un punto di cuspidè;} \\ \lim_{x \rightarrow \pm 1} f'(x) &= \pm \infty \quad \Rightarrow \quad \pm 1 \text{ sono punti di flesso a tangente verticale.} \end{aligned}$$

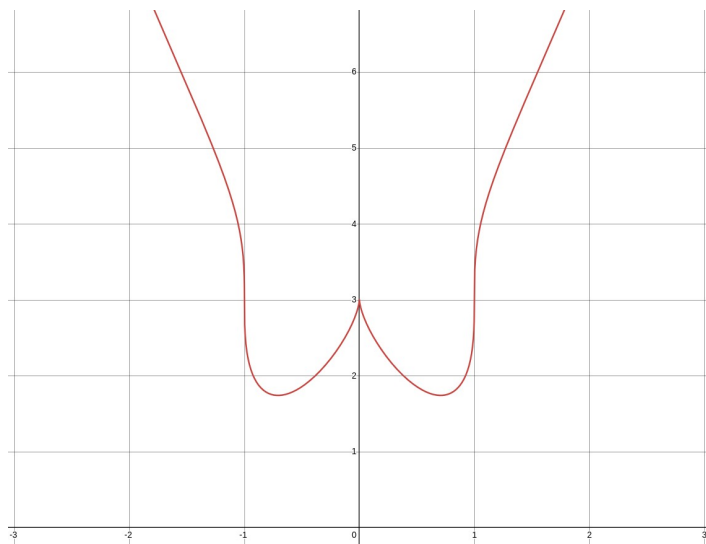


FIGURA 1. Grafico della funzione $3 + 2\sqrt[3]{x^4 - x^2}$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{2b}^{+\infty} \frac{\log ax}{(x-b)^{3/2}} dx.$$

$$[(a, b) = (5, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2)]$$

Svolgimento: Consideriamo il caso $(a, b) = (2, 3)$ e calcoliamo prima l'integrale in definito. Procedendo per parti:

$$I := \int \frac{\log 2x}{(x-3)^{3/2}} dx = -2 \frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + 2 \int \frac{1}{x \sqrt{x-3}} dx.$$

Integriamo adesso il secondo addendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \sqrt{x-3}} dx &= 2 \int \frac{1}{t^2 + 3} dt \quad (t := \sqrt{x-3}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} + k \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inserendo quest'ultimo risultato nell'integrale indefinito, otteniamo:

$$I = -2 \frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_6^{+\infty} \frac{\log 2x}{(x-3)^{3/2}} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-2 \frac{\log(2x)}{(x-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}} \right]_6^c \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ -2 \frac{\log(2c)}{(c-3)^{1/2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c-3}}{\sqrt{3}} + 2 \frac{\log(12)}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 1 \right\} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log(12). \end{aligned}$$

Esercizio 3. [6 punti]

Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$[A] \quad z^2(4 - |z^2|) = 5i.$$

$$[B] \quad z^2(|z^2| - 2) = 3i.$$

$$[C] \quad z^2(2 - |z^2|) = 3i.$$

$$[D] \quad z^2(|z^2| - 4) = 5i.$$

Svolgimento: Mostriamo qui lo svolgimento nel caso [B].

- osserviamo che $|z^2| - 2 \neq 0$, altrimenti nell'equazione avremmo $0 = 3$, assurdo, possiamo quindi scrivere il problema come

$$z^2 = \frac{3i}{|z^2| - 2} = ai, \quad \text{per un certo } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Se $a > 0$ allora $|z^2| = a$ e l'equazione da studiare diventa

$$(ai)(a - 2) = 3i \implies a(a - 2) = 3,$$

la cui unica soluzione positiva è $a = 3$. Concludendo, risolviamo $z^2 = ai = 3i$ ed otteniamo $z = \pm\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- Se $a < 0$ allora $|z^2| = |a| = -a$ e l'equazione da studiare diventa

$$ai(-a - 2) = 3i \implies a(-a - 2) = 3,$$

che non ha soluzioni reali.

In conclusione, le soluzioni del problema proposto sono $z = \pm\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Traccia di altro svolgimento (I): Si scrive $z = \rho e^{\theta i}$ e si risolvono i due problemi

$$\rho^2(\rho^2 - 2)e^{2\theta i} = 5e^{(\pi/2)i} \quad \text{se } \rho^2 - 2 \geq 0,$$

$$\rho^2(2 - \rho^2)e^{(2\theta + \pi)i} = 5e^{(\pi/2)i} \quad \text{se } \rho^2 - 2 < 0.$$

Per risolvere tali problemi, si eguagliano moduli e argomenti, a meno di $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

N.B. non dimenticare il secondo caso (da dove viene?).

Traccia di altro svolgimento (II): Si scrive $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, e si imposta il sistema in $\mathbb{R}$ che si ottiene eguagliando le parti reali e le parti immaginarie.

Il sistema che si ottiene richiede un po' di perizia ma non è impossibile.

Esercizio 4. [5 punti] Scrivere lo sviluppo di Maclaurin al IV ordine di

$$f(x) = \frac{1}{\log(a + x^2)}.$$

$$[a = 4, 5, 2, 3]$$

Svolgimento: Useremo i seguenti sviluppi:

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \quad \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 + o(t^2).$$

Consideriamo il caso $a = 5$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\log 5 + \log\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)} \\ &= \frac{1}{\log 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{25} + o(x^4)} \\ &= \frac{1}{\log 5} \left[1 + \frac{1}{5\log 5} x^2 - \frac{1}{50\log 5} x^4 + o(x^4) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{\log 5} \left[1 - \left(\frac{1}{5\log 5} x^2 - \frac{1}{50\log 5} x^4 \right) + \left(\frac{1}{5\log 5} x^2 + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \right] \\ &= \frac{1}{\log 5} \left[1 - \frac{1}{5\log 5} x^2 + \left(\frac{1}{50\log 5} + \frac{1}{25\log^2 5} \right) x^4 + o(x^4) \right] \\ &= \frac{1}{\log 5} - \frac{1}{5\log^2 5} x^2 + \left(\frac{1}{50\log^2 5} + \frac{1}{25\log^3 5} \right) x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Idea per altro svolgimento: Si pone $x^2 = t$ e si considera la funzione $g(t) = [\log(a + t)]^{-1}$.

Poiché $x \rightarrow 0$ dà anche $t \rightarrow 0$, si può scrivere lo sviluppo di Maclaurin di g al secondo ordine (basta!) calcolando esplicitamente $g'(0)$ e $g''(0)$ e poi riportarlo allo sviluppo di $f(x)$, dato che $f(x) = g(x^2)$.

Esercizio 5. [7 punti]

Dopo aver trovato la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\cosh y}{\sinh y} \frac{\cos x}{\sin x} \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A, \end{cases}$$

trovarne l'intervallo massimale di esistenza.

[$A = 2, 3, 4, 5$ e seni e coseni permutati (quando c'è il coseno al denominatore si parte da $-\pi$)]

Svolgimento: Consideriamo il caso $A = 4$ e lavoriamo nell'intervallo massimale I , che verrà individuato raccogliendo le condizioni di esistenza.

L'EDO può essere svolta separando le variabili. Tenendo conto che $\cosh y \geq 1 > 0, \forall y \in \mathbb{R}$, possiamo dividere ottenendo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sinh y(x)}{\cosh y(x)} y'(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

Svolgendo gli integrali (il primo con la sostituzione $y(x) = y$) e considerando gli integrali indefiniti, abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh y(x)}{\cosh y(x)} y'(x) dx &= \log \cosh y(x) + c_1 & c_1 \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \log |\sin x| + c_2 & c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Osserviamo adesso che nell'intorno del punto dove è posto il problema di Cauchy risulta $\sin x < 0$, per cui nell'intervallo massimale I deve essere

$$(2) \quad \log(\cosh y(x)) = \log(-\sin x) + c = \log(-k \sin x) \quad \text{dove } c \in \mathbb{R} \text{ e } k = e^c > 0.$$

Troviamo allora

$$\cosh y(x) = -k \sin x.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha $k = \cosh 4$. Quindi la soluzione è:

$$y(x) = \operatorname{arccosh} \left(-(\cosh 4) \sin x \right) \quad x \in I$$

(la condizione iniziale si poteva usare anche in (2), trovando direttamente la costante di integrazione c). Per quanto riguarda l'individuazione di I consideriamo che $\cosh y \geq 1, \forall y \in \mathbb{R}$ e che $y(x) \neq 0$ in I perché sia ben definita l'equazione nel problema di Cauchy dato. Va quindi imposto $-(\cosh 4) \sin x > 1$, ovvero

$$\sin x < -\frac{1}{\cosh 4}.$$

Risolvendo la disequazione trigonometrica otteniamo

$$I = \left(-\pi + \arcsin \left(\frac{1}{\cosh 4} \right), -\arcsin \left(\frac{1}{\cosh 4} \right) \right).$$