

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\log(1 + ax^2)} - \arctan(\sqrt{ax} + cx^3)}{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}.$$

$[(a, c) = (2, 1), (4, -1), (3, 1), (9, -1)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+y} &= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \log(1+y) = y + o(y), \quad e^y = 1 + y + o(y), \\ \arctan y &= y - \frac{y^3}{3} + o(y^4), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\log(1 + ax^2)} &= \sqrt{ax^2 - \frac{a^2 x^4}{2} + o(x^5)} = \sqrt{ax} \sqrt{1 - \frac{ax^2}{2} + o(x^3)} = \sqrt{ax} \left(1 - \frac{ax^2}{4} + o(x^3)\right) \\ &= \sqrt{ax} - \frac{a\sqrt{ax}^3}{4} + o(x^4), \\ \arctan(\sqrt{ax} + cx^3) &= \sqrt{ax} + cx^3 - a\sqrt{ax} \frac{x^3}{3} + o(x^4) = \sqrt{ax} + \left(c - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right)x^3 + o(x^4), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\sqrt{\log(1 + ax^2)} - \arctan(\sqrt{ax} + cx^3) = \left(-c + \frac{a\sqrt{a}}{12}\right)x^3 + o(x^4).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^x = \exp\left(x \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

da cui segue

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\left(-6c + \frac{a\sqrt{a}}{2}\right).$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \cos^2 x e^{\frac{a}{\cos x}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})]$$

Svolgimento: Consideriamo la funzione per $a = \sqrt{2}$:

$$f(x) = \cos^2 x e^{\frac{\sqrt{2}}{\cos x}}.$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. la funzione è periodica (periodo 2π) e pari, basta studiarla per esempio in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, dove f è di classe C^1 . $f > 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{per } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \\ 0 & \text{per } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale.

Per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ si ha che

$$f'(x) = \sin x (\sqrt{2} - 2 \cos x) e^{\frac{\sqrt{2}}{\cos x}}, \text{ quindi } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \pi.$$

Più precisamente, f è decrescente nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{4}]$, e f è crescente negli intervalli $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Perciò f ha un massimo locale in $x = 0$ e un minimo locale in $x = \frac{\pi}{4}$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = 0.$$

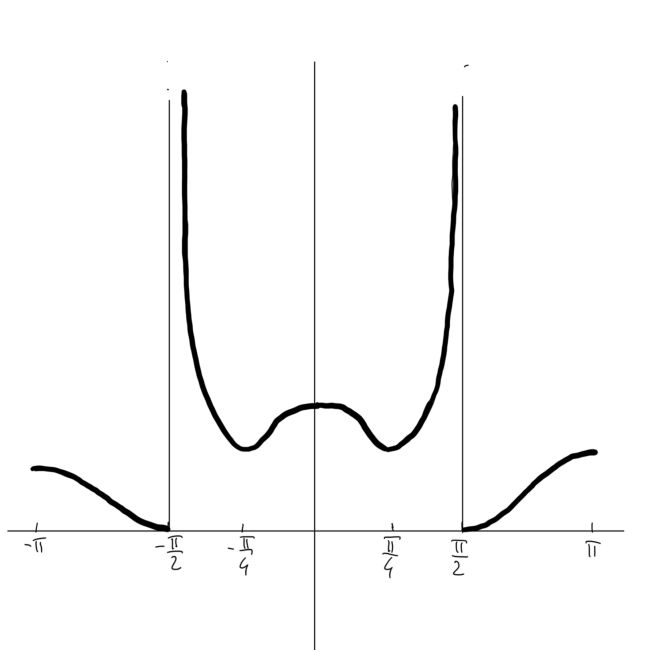


FIGURA 1. Grafico per $a = \sqrt{2}$

Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{a/2} \sin^\alpha\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Risulta

$$f(x) \sim \left(\frac{2\pi x}{a}\right)^\alpha \frac{x}{a-x} \sim \frac{2^{\alpha+1}\pi^\alpha}{a^{\alpha+1}} x^{\alpha+1} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{a}{4}]$ se e solo se $\alpha > -2$. D'altra parte, posto $y = \frac{a}{2} - x$,

$$f(x) = \sin^\alpha\left(\pi - \frac{2\pi}{ay}\right) \arcsin\left(\frac{\frac{a}{2} - y}{\frac{a}{2} + y}\right) \sim \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha} y^\alpha \text{ per } y \rightarrow 0^+,$$

da cui

$$f(x) \sim \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha} \left(\frac{a}{2} - x\right)^\alpha \text{ per } x \rightarrow \frac{a}{2}^+.$$

Pertanto f è integrabile in $[\frac{a}{4}, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha > -1$.

Segue che f è integrabile in $(0, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha > -1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{a/2} \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) dx.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) - \frac{a}{\sqrt{a}} \int \frac{x}{(a-x)\sqrt{a-2x}} dx.$$

Con la sostituzione $\sqrt{a-2x} = y$ nell'ultimo integrale si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(a-x)\sqrt{a-2x}} dx &= - \int \frac{a-y^2}{a+y^2} dy = - \int \left(\frac{2a}{a+y^2} - 1\right) dy = -2\sqrt{a} \arctan \frac{y}{\sqrt{a}} + y \\ &= -2\sqrt{a} \arctan \frac{\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a}} + \sqrt{a-2x}. \end{aligned}$$

Si deduce

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) + 2a \arctan \frac{\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}} \sqrt{a-2x}.$$

Pertanto si conclude

$$\int_0^{a/2} \arcsin\left(\frac{x}{a-x}\right) dx = a \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2 - 1}y + ax^2, \\ y(0) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$[a = 5, 4, 3, 2]$$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione lineare del I ordine, il cui secondo membro è definito per $x \neq \pm 1$. Poiché allora la condizione iniziale è imposta in $x_0 = 0 \in (-1, 1)$, il dominio della soluzione sarà $(-1, 1)$. In tale intervallo si ha pertanto

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \log |x^2 - 1| = \log(1 - x^2),$$

e l'integrale generale è allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\log(1-x^2)} \left(c + a \int e^{-\log(1-x^2)} x^2 dx \right) \\ &= (1 - x^2) \left(c + a \int \left(-1 + \frac{1}{1 - x^2} \right) dx \right) \\ &= (1 - x^2) \left(c - ax + \frac{a}{2} \int \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx \right) \\ &= (1 - x^2) \left(c - ax + \frac{a}{2} \log \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \right) \\ &= (1 - x^2) \left(c - ax + a \log \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $\frac{1+x}{1-x} > 0$ per ogni $x \in (-1, 1)$. Imponendo poi la condizione iniziale si trova $c = a$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = a(1 - x^2) \left(1 - x + \log \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \right),$$

con intervallo di definizione $(-1, 1)$.

Esercizio 5. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) \quad \left[f(x) = \cos\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) \right]$$

Svolgimento: Per $x \rightarrow 0$

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + o(x^5), \quad \frac{x}{1 \pm x} = x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 + o(x^5),$$

perciò

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) &= \sin(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 + o(x^5)) \\ &= x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 - \frac{1}{6}(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5)^3 + \frac{1}{120}(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5)^5 + o(x^5) \\ &= x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 - \frac{1}{6}(x^3 \mp 3x^4 + 6x^5) \mp \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ &= x \mp x^2 + \frac{5}{6}x^3 \mp \frac{1}{2}x^4 + \frac{-120 \mp 1}{120}x^5 + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$