Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} - n + 2a\log\left(\sqrt{n}-1\right) - a}{n\Big(\log\sqrt[n]{n}\Big)^2}.$$

$[a = -3, 3, -2, 2]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $x \to 0^+$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad \log(1+x) = x + o(x), \quad e^x = 1 + x + o(x).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} &= n\sqrt{\Big(1+\frac{2a}{n}\Big)\Big(1-\frac{2a\log n}{n}\Big)} = n\sqrt{1-\frac{2a\log n}{n}+\frac{2a}{n}-\frac{4a^2\log^2 n}{n^2}} \\ &= n\Big(1-\frac{a\log n}{n}+\frac{a}{n}-\frac{5a^2\log^2 n}{2n^2}+o\Big(\frac{\log^2 n}{n^2}\Big)\Big) \\ &= n - a\log n + a - \frac{5a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big),\end{aligned}$$

$$2a\log(\sqrt{n}-1) = a\log(n-1) = a\log n + a\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = a\log n - \frac{a}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

da cui segue

$$\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} - n + 2a\log(\sqrt{n}-1) - a = -\frac{5a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big).$$

D'altra parte

$$n\Big(\log\sqrt[n]{n}\Big)^2 = \frac{\log^2 n}{n}.$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{5a^2}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = b \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (2, 3), (2, -3), (3, 2), (3, -2)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Il dominio è

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0,\ -1 \leq \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1\right\}.$$

Poiché allora il discriminante del polinomio quadratico di x^2, $2x^4 - 2ax^2 + a^2$, è $-a^2 < 0$, si ha $2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \geq -1$$

è banalmente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq \sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2ax^2 + a^2 = (x^2 - a)^2 \geq 0$$

è anch'essa verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, con l'uguaglianza valida per $x = \pm\sqrt{a}$. Dunque $D = \mathbb{R}$. Inoltre chiaramente la funzione data è pari, e basta dunque studiarla per $x \geq 0$.
Si ha poi

$$\lim_{x \to +\infty} b \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}\right) = b \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} b,$$

e dunque la retta di equazione $y = b\pi/4$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, mentre ovviamente il grafico della funzione non possiede asintoti verticali né obliqui.
La derivata è, per $x \neq \pm\sqrt{a}$ (punti in cui l'argomento dell'arcoseno vale 1, e non è quindi garantita la derivabilità di f),

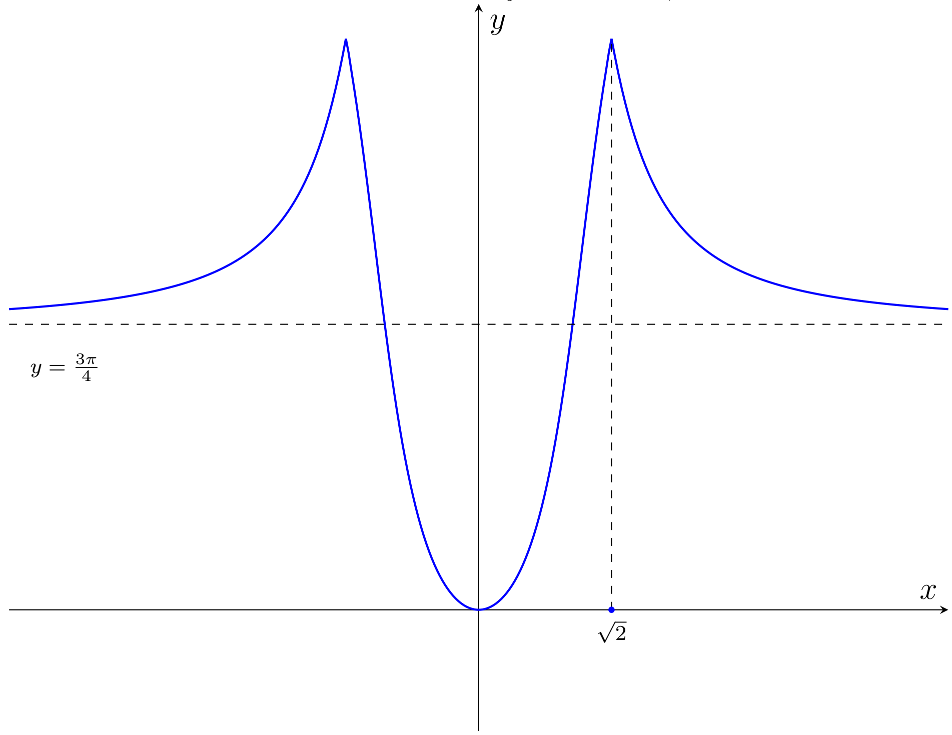
$$\begin{aligned}
f'(x) &= b \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}} \frac{2x\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} - x^2 \frac{4x^3 - 2ax}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\
&= b \frac{1}{\sqrt{x^4 - 2ax^2 + a^2}} \frac{2x(2x^4 - 2ax^2 + a^2) - 4x^5 + 2ax^3}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\
&= 2ab \frac{x(a - x^2)}{|x^2 - a|(2x^4 - 2ax^2 + a^2)},
\end{aligned}$$

e inoltre, essendo $\frac{a - x^2}{|x^2 - a|}$ l'opposto del segno di $x^2 - a$, si ha

$$\lim_{x \to \sqrt{a}^{\pm}} f'(x) = \mp \frac{2b}{\sqrt{a}},$$

e dunque i punti del grafico di ascisse $x = \pm\sqrt{a}$ sono punti angolosi.
Infine chiaramente $f'(0) = 0$, e per $x > 0$ il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $b(a - x^2)$, e dunque, se $b > 0$ la funzione f è crescente in $(0, \sqrt{a})$ e decrescente in $(\sqrt{a}, +\infty)$, ed ha pertanto un minimo in $x = 0$ e massimi in $x = \pm\sqrt{a}$. Viceversa se $b < 0$.

Figura 1. Grafico di f con $a = 2$, $b = 3$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{c(\alpha-1)x}}{\big(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c\big)^{\alpha+1}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

$[(a, b, c) = (5, 4, 3), (5, 3, 4), (5, -3, 4), (5, -4, 3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Notiamo che

$$\frac{1}{a\cosh(x) + b\sinh(x) + c} = \frac{2e^x}{(a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b)}.$$

Convergenza: L'integrale converge per $\frac{c-1}{c+1} < \alpha < \frac{c+1}{c-1}$.
Infatti per $x \to +\infty$

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c)^{\alpha+1}} \sim e^{(c(\alpha-1)-(\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha - 1) - (\alpha + 1)) < 0$, ovvero $\alpha < \frac{c+1}{c-1}$.
Mentre per $x \to -\infty$

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c)^{\alpha}} \sim e^{(c(\alpha-1)+(\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha - 1) + (\alpha + 1)) > 0$, ovvero $\alpha > \frac{c-1}{c+1}$.
Calcolo per $\alpha = 1$: Cambio di variabile $t = e^x$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a\cosh(x) + b\sinh(x) + c)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{2x}}{((a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b))^2} dx \\
&= 4\int_0^{+\infty} \frac{t}{((a+b)t^2 + 2ct + (a-b))^2} dt \\
&= \frac{4}{(a+b)^2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t + \frac{c}{a+b})^4} dt \\
&= \frac{4}{(a+b)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + \frac{c}{a+b})^3} dt - \frac{4c}{(a+b)^3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + \frac{c}{a+b})^4} dt \\
&= \frac{2}{c^2} - \frac{4}{3c^2} \\
&= \frac{2}{3c^2}.
\end{aligned}$$

Si noti infatti che nei tre casi abbiamo $c^2 = a^2 - b^2$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = Ax - Be^x.$$

$[(A,B) = (2,3), (3,2), (2,4), (4,3)]$

Svolgimento: L'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 3y = 0$ ha soluzione generale $c_1e^x + c_2e^{3x}$.
L'equazione $y'' - 4y' + 3y = x$ ha come soluzione particolare $y = ax + b$ se $-4 + 3ax + 3b = x$, ovvero se $a = \frac{A}{3}$ e $b = \frac{4A}{9}$: $y = \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9}$.
L'equazione $y''-4y'+3y = -Ae^x$ ha come soluzione particolare $y = cxe^x$ se $c(2+x)-4c(1+x)+3cx = -B$, ovvero se $c = \frac{B}{2}$: $y = \frac{B}{2}xe^x$.
Allora la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = x - e^x$ è $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9} + \frac{B}{2}xe^x$.

Cognome (in $\texttt{STAMPATELLO}$): .... Nome (in $\texttt{STAMPATELLO}$):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\frac{z+2}{|z|} = \frac{\mathrm{i}}{a}.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento: $z = 0$ non è soluzione. Se $z \neq 0$, posto $z = x + iy$ si ha

$$z + 2 = \frac{i}{a}|z| \iff x + 2 + iy = \frac{i}{a}\sqrt{x^2+y^2} \iff \begin{cases} x+2=0 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{4+y^2} \end{cases}$$

ovvero

$$x = -2, \quad y = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Pertanto si ottiene un'unica soluzione $z = -2 + \frac{2i}{\sqrt{a^2-1}}$.