

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13 settembre 2024

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(|a - \log(x^2)|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Lo studio della derivata seconda non è necessario.

$[a = 1, 2, -1, -2]$

Svolgimento:

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Simmetria: funzione pari, pertanto possiamo limitarci a studiare la funzione per $x > 0$.

Segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq 0$.

Ora

$$a - \log(x^2) = a - 2\log(x) \geq 0 \iff \log(x) \leq a/2 \iff x \leq \exp(a/2).$$

Riassumendo

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(a - 2\log(x)) & \text{se } 0 < x \leq \exp(a/2) \\ \arctan(2\log(x) - a) & \text{se } \exp(a/2) < x. \end{cases}$$

La funzione è continua nel suo dominio.

Limiti di frontiera (e asintoti): abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

pertanto f ha come asintoto orizzontale $y = \pi/2$.

Derivabilità: f è derivabile per ogni x nel dominio eccetto il caso $x = \pm \exp(a/2)$ che deve essere studiato a parte. La derivata vale:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x(1 + \frac{(a - 2\ln(x))^2}{2})} & \text{se } 0 < x < \exp(a/2) \\ \frac{2}{x(1 + (a - 2\ln(x))^2)} & \text{se } \exp(a/2) < x. \end{cases}$$

Monotonia: La funzione è decrescente in $(0, \exp(a/2))$ e crescente per $x > \exp(a/2)$.

Massimi e minimi: Il punto $x = \exp(a/2)$ è un punto di minimo (assoluto) dove la funzione vale 0.

Punti di non derivabilità: Si ha che $\exp(a/2)$ è un punto angoloso poiché

$$\lim_{x \rightarrow \exp(a/2)^-} f'(x) = -2 \exp(-a/2) \quad \lim_{x \rightarrow \exp(a/2)^+} f'(x) = 2 \exp(-a/2).$$

Il punto $x = 0$ non appartiene al dominio di f ma se estendessimo per continuità f sarebbe una cuspide.

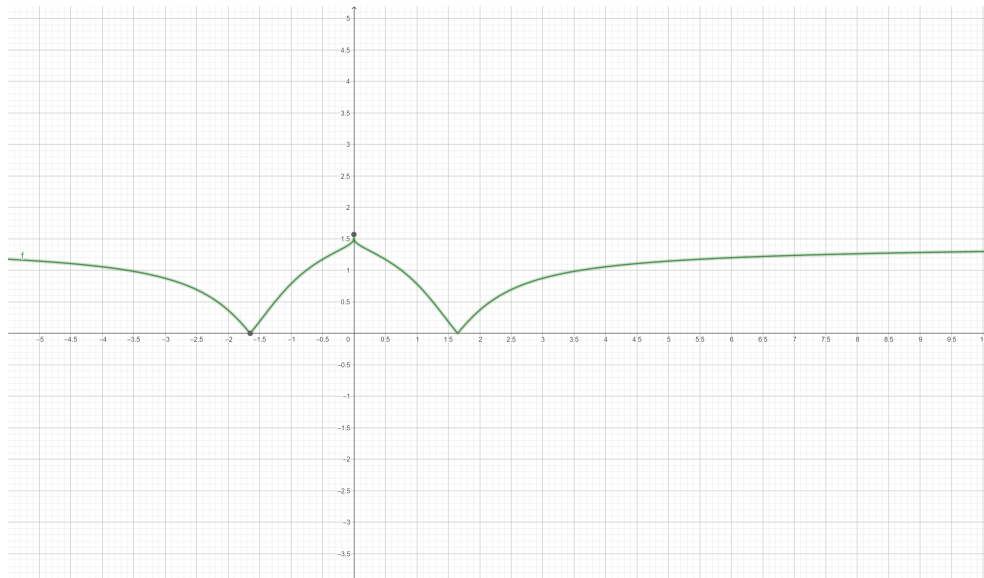


FIGURE 1. Grafico di f per $a = 2$

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(\ln(\alpha) + \ln(t))}{(1 + \alpha^2 t^2)^2} dt.$$

$$[\alpha = e^{1/2}, e, e^{-1}, e^{-1/2}]$$

Svolgimento: Il coefficiente α si può supporre 1 tramite un cambio di variabile. Più precisamente si considera il cambio di variabile $y = \alpha t$ con $dy = \alpha dt$ per il quale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(\ln(\alpha) + \ln(t))}{(1 + \alpha^2 t^2)^2} dt = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{y(\ln(y))}{(1 + y^2)^2} dy.$$

Pertanto qui sotto mostriamo il procedimento con $\alpha = 1$ usando ancora la variabile t . Il risultato sarà lo stesso per tutte le versioni.

Le funzioni sono continue per ogni $t > 0$. L'integrale è improprio ai due estremi. Consideriamo $0 < a < b < +\infty$. Facciamo un' integrazione per parti con

$$(1) \quad f'(t) = \frac{t}{(1 + t^2)^2} \implies f(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + t^2}$$

e

$$(2) \quad g(t) = \ln(t) \implies g'(t) = \frac{1}{t}.$$

Abbiamo

$$\int \frac{t \ln(t)}{(1 + t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(1 + t^2)}.$$

Ora, la funzione razionale si decompone secondo la formula

$$\frac{1}{t(1 + t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1}.$$

Identificando abbiamo che $A = 1, B = -1, C = 0$, ovvero

$$\int \frac{dt}{t(1 + t^2)} = \int \frac{1}{t} - \frac{t}{1 + t^2} dt = \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + c$$

Calcoliamo la primitiva così ottenuta in $0 < a < b$ e consideriamo i limiti

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(b)}{1 + b^2} + \ln\left(\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}\right) = 0$$

e

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a)}{1 + a^2} - \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(1 + a^2) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(a) \left(\frac{1}{1 + a^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \ln(1 + a^2) = 0.$$

Concludiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1 + t^2)^2} dt = 0.$$

Metodo alternativo:

Un procedimento equivalente, alternativo all'integrazione per parti (1)–(2) è il seguente: Si sostituisce $y = t^2$ e si integra per parti, ovvero

$$\int \frac{t \ln(t)}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2} \ln(y)}{(1 + y)^2} dy = -\frac{1}{4} \frac{\ln y}{(1 + y)} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{y(1 + y)} dy$$

Ora, la funzione razionale si decompone secondo la formula

$$\frac{1}{y(1 + y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 + y}.$$

Per identificazione otteniamo $A = 1, B = -1$, ovvero, come sopra

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} dy = \ln(y) - \ln(1+y) + c.$$

Calcoliamo la primitiva così ottenuta in $0 < a < b$ e consideriamo i limiti

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(b)}{1+b} + \ln\left(\frac{b}{1+b}\right) = 0$$

e

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a)}{1+a} - \ln(a) + \ln(1+a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(a) \left(\frac{1}{1+a} - 1 \right) + \ln(1+a) = 0.$$

Concludiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt = 0.$$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{\cos(t)}{\sin(t)}y(t) + \sin(t), \\ y(a) &= 1, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$$[a = -\pi/3, -\pi/4, -\pi/6, -3\pi/4]$$

Svolgimento: La soluzione generale y_h dell'equazione omogenea si determina integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \iff \ln |y| = \ln |\sin(t)| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pertanto $y_h = c \sin(t)$. Per determinare la soluzione generale useremo il metodo della variazione delle costanti. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \left(t - a + \frac{1}{\sin(a)} \right) \sin(t).$$

L'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $(-\pi, 0)$.

Esercizio 4. [5 punti] Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

Svolgimento: Le differenti versioni si ottengono da questa sopra (A) sostituendo z con iz , $-iz$, $-z$ per ottenere le versioni B, C, D rispettivamente.

Poniamo $w = \frac{z+1}{z-1}$. Le radici quarte dell'unità, soluzione di $w^4 = 1$, sono

$$\exp\left(ik\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$

Ora per $k = 0$ abbiamo $w = 1$ che non può essere soluzione poiché $\frac{z+1}{z-1} = 1$ non ha soluzione. Per $k = 1, 2, 3$ abbiamo che $w = \frac{z+1}{z-1}$ implica $z = \frac{w+1}{w-1}$. Pertanto le soluzioni sono della forma

$$\frac{e^{i\theta_k} + 1}{e^{i\theta_k} - 1}, \quad \text{per } k = 1, 2, 3,$$

dove $\theta_k = k\pi/2$, ovvero $\pi/2, \pi, 3\pi/2$. Semplificando avremo tre soluzioni: $i, 0, -i$.

Esercizio 5. [5 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + ax^2) - x \arctan(ax)}{x \arcsin^3(x)}$$

[a=2,3,4,5]

Svolgimento:

Cominciamo sviluppando il denominatore: abbiamo

$$\arcsin(x) = x + o(x) \implies x \arcsin^3(x) = x^4 + o(x^4), \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Basterà, pertanto, sviluppare il numeratore all'ordine 4. Si ha

$$\log(1 + ax^2) = ax^2 - \frac{a^2 x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e

$$\arctan ax = ax - \frac{(ax)^3}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto

$$\frac{\log(1 + ax^2) - x \arctan(ax)}{x \arcsin^3(x)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + o(1),$$

per $x \rightarrow 0$.