

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta giugno 2022

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\log(2x)) e^{-\frac{1}{2x^2}} + \cos(\arctan x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\log(1 + (ax)^2) - \sin(ax)^2}.$$

Svolgimento:

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

In particolare ci servirà il caso con $\alpha = 4$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(\log(2x)) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^4} = 0$$

(“infinitesima per limitata”).

Al numeratore ci basta allora lo sviluppo del secondo e terzo addendo, che dà:

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arctg} x) - e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right)^4 \\ &\quad + o \left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right)^4 \right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o \left(\left(\frac{x^2}{2} \right)^3 \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Al denominatore:

$$\begin{aligned} \log(1 + a^2 x^2) - \sin(a^2 x^2) &= (ax)^2 - \frac{(ax)^4}{2} + o((ax)^4) - (ax)^2 + o((ax)^4) \\ &= -\frac{(ax)^4}{2} + o((ax)^4). \end{aligned}$$

Quindi il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4} x^4 + o(x^4)}{-\frac{(ax)^4}{2} + o((ax)^4)} = -\frac{1}{2a^4}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |x| - \log(x^2 + 4x + 4)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **È richiesto lo studio della derivata seconda.**

Svolgimento:

Dominio:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Asintoti: c'è un asintoto verticale in $x = -2$. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} (|x| - \ln(x^2 + 4x + 4)) = +\infty;$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (|x| - \ln(x^2 + 4x + 4)) = +\infty;$$

Non ci sono asintoti obliqui. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| - \ln(x^2 + 4x + 4)}{x} = \pm 1,$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| - \ln(x^2 + 4x + 4) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x^2 + 4x + 4)) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| - \ln(x^2 + 4x + 4) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(x^2 + 4x + 4)) = -\infty,$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2} & x > 0 \\ -1 - \frac{2}{x+2} = -\frac{x+4}{x+2} & x < 0 \end{cases}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2,$$

f non è derivabile in $x = 0$, ove f ha un punto angoloso.

Studiamo il segno della derivata. Per $x > 0$:

$$f'(x) > 0, \text{ quindi } f \text{ crescente, per } x \in (0, +\infty);$$

Per $x < 0$:

$$f'(x) < 0, \text{ quindi } f \text{ decrescente, per } x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 0);$$

$$f'(x) > 0, \text{ quindi } f \text{ crescente, per } x \in (-4, -2);$$

$$f'(x) = 0, \text{ quindi un punto stazionario, per } x = -4.$$

Possiamo dedurre allora che $x_m := -4$ è un punto di minimo relativo. Osserviamo che x_m non è un punto di minimo assoluto perché $f(-4) > 0$ mentre $f(0) < 0$.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\},$$

quindi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$. Osserviamo che in 0 la derivata prima non è definita per cui non ha senso fare la derivata seconda di f in quel punto. Possiamo dedurre da quanto detto che la funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ e $(0, +\infty)$. Per dire che f è in realtà convessa in tutto $(-2, +\infty)$ possiamo osservare che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2 < \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

Grafico:

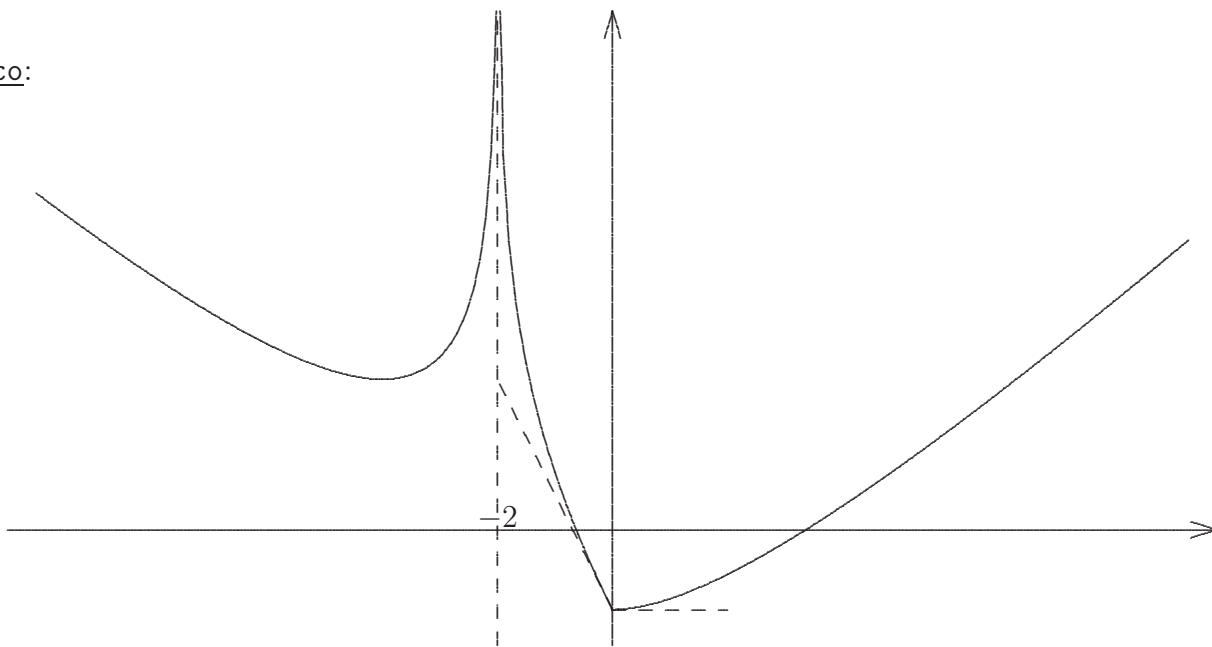


Figura 1: Tratteggiati l'asintoto verticale e le due tangenti nel punto di ascissa $x = 0$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(x^2 + 2)^{\frac{\alpha}{2}} (\cosh(ax))^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

Svolgimento:

Nello studio che segue terremo conto che nelle versioni proposte $a \geq 2$ ed indicheremo con f_α la funzione integranda.

Convergenza a $+\infty$: Studiamo l'andamento asintotico a $+\infty$ delle espressioni coinvolte in f_α :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)^{\alpha/2}}{x^\alpha} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\cosh(ax))^2}{e^{2ax}} = \frac{1}{4}.$$

Da ciò deduciamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f_\alpha(x)] : \left[\frac{e^{\alpha x}}{x^\alpha e^{2ax}} \right] = 4.$$

Per confronto asintotico allora il nostro integrale converge a $+\infty$ se e solo se converge a $+\infty$ la funzione

$$\frac{1}{x^\alpha e^{(2a-\alpha)|x|}},$$

ovvero per $\alpha \leq 2a$. Qui abbiamo usato il fatto che se $\alpha = 2a$ allora l'espressione diventa $\frac{1}{x^{2a}}$ con $2a > 1$.

Convergenza a $-\infty$: Ragionando come nel punto precedente abbiamo che f_α a $-\infty$ è asintotica a

$$\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^\alpha e^{2a|x|}} = \frac{1}{|x|^\alpha e^{(2a+\alpha)|x|}}.$$

Per il criterio di confronto asintotico abbiamo allora che l'integrale proposto converge a $-\infty$ per $\alpha > -2a$. Osserviamo che adesso il caso $\alpha = -2a$ non dà convergenza.

Conclusione: **L'integrale proposto converge se e solo se $\alpha \in (-2a, 2a]$.**

Calcolo nel caso $\alpha = 0$: Poichè $f_0(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f_0(x) dx.$$

Calcoliamo, per un generico $c > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c f_0(x) dx &= \int_{-c}^c \frac{4}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} dx \\ &= \frac{4}{a} \int_{e^{-ac}}^{e^{ac}} \frac{1}{t \left(t + \frac{1}{t}\right)^2} dt \quad (\text{sostituzione } e^{ax} = t) \\ &= \frac{4}{a} \int_{e^{-ac}}^{e^{ac}} \frac{t}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (\text{riarrangiando integrando}) \\ &= \frac{4}{a} \frac{1}{2} \int_{(e^{-2ac}+1)}^{(e^{2ac}+1)} \frac{1}{\tau^2} d\tau \quad (\text{sostituzione } t^2 + 1 = \tau) \\ &= \frac{2}{a} \left[-\frac{1}{\tau} \right]_{e^{-2ac}+1}^{e^{2ac}+1}. \end{aligned}$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x), dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{2}{a} \left[-\frac{1}{\tau} \right]_{e^{-2ac}+1}^{e^{2ac}+1} \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{2}{a} \left(-\frac{1}{e^{2ac}+1} + \frac{1}{e^{-2ac}+1} \right) \\ &= \frac{2}{a}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{y^2 x}{x^2 + e^a} = 0 \\ y(0) = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Svolgimento:

Nel problema di Cauchy proposto risolviamo prima l'equazione e poi imponiamo la condizione iniziale. L'equazione si presta ad essere risolta separando le variabili:

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{x}{x^2 + e^a}. \quad (C)$$

Risulta

$$\int \frac{y'}{y^2} dx = -\frac{1}{y(x)} + c_1 \quad \text{e} \quad \int -\frac{x}{x^2 + e^a} dx = -\frac{1}{2} \log(x^2 + e^a) + c_2$$

con c_1, c_2 generiche costanti reali. Ponendo $c_1 - c_2 = c$ e $c = \log k$, con $k > 0$ (i.e. $k = e^c$), dall'equazione (C) si ha

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2} \log(x^2 + e^a) + c = \log k (x^2 + e^a)^{1/2} \quad k \in (0, +\infty).$$

Possiamo quindi scrivere le soluzioni dell'equazione (C) come

$$y_k(x) = \frac{1}{\log k (x^2 + e^a)^{1/2}}.$$

Osserviamo che qualunque sia $k > 0$ le soluzioni sono ben definite $\forall x \in \mathbb{R}$, infatti $k(x^2 + e^a) \geq k e^a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Imponiamo adesso la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{a}$. Da

$$y(0) = \frac{1}{\log k e^{a/2}} = \frac{1}{\frac{a}{2} + \log k}$$

abbiamo che deve essere

$$\frac{a}{2} + \log k = a$$

quindi $\log k = \frac{a}{2}$. Concludendo, la soluzione cercata corrisponde a $k = e^{a/2}$ ed è

$$y(x) = \frac{1}{\log[e^a(x^2 + e^a)]^{1/2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5 [5 punti] Disegnare sul piano complesso l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} : \left| \frac{z-a}{z+a} \right| = b \right\}.$$

Svolgimento:

Scriviamo $z = x + iy$. Allora la condizione richiesta diventa, $|x + iy - a| = b|x + iy + a|$, ovvero

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = b\sqrt{(x+a)^2 + b^2y^2}.$$

Dato che $b > 0$ elevando al quadrato si ha la condizione equivalente:

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2(x+a)^2 + b^2y^2.$$

Riarrangiando i termini si ottiene la circonferenza:

$$(1-b^2)x^2 + (1-b^2)y^2 - 2ax(1+b^2) + a^2(1-b^2) = 0,$$

con centro in $C(a\frac{1+b^2}{1-b^2}, 0)$ e raggio $r = \frac{2ab}{b^2-1}$ (usando $b > 1$).