Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 29/01/24 - I Turno

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{b} + a - \arcsin|e^{-bx} - 1|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

[$(a,b) = (2,2); (3,-2); (-2,3); (2,-3)$; $b < -1$ con $f(-x)$ al posto di $f(x)$.]

Esercizio 2. [5 punti] Determinare l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tale che:

$$|z + ia| = |z - b|$$

e disegnarlo sul piano complesso (di Gauss)

[$(2,3); (3,2); (4,2); (2,4)$)]

Esercizio 3. [7 punti] Mettere in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{(\arctan(ax))^2 - a^2x^2 + e^{x^c} - 1}{2x^{\frac{1}{b}} + 3x^{\frac{1}{b-1}} + e^{-\frac{c}{x}}}$$

$$g(x) = x^3\left(1 - \frac{\cos(cx)}{\sqrt{1 + (cx)^{\frac{1}{c}}}}\right)$$

$$h(x) = x^{4-\frac{1}{b}} \log(x^a + e^{\frac{x-c}{x}})$$

[$(a,b,c) = (\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 5), (2, \frac{5}{4}, 6), (3, \frac{3}{2}, 7), (4, 2, 8)$]

Esercizio 4. [7 punti]
Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \geq 0$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\alpha = 0$:

$$\int_b^{+\infty} \frac{(\log x - \log b)^{\frac{\alpha}{3b}}}{(x-b)^{\alpha}\sqrt{e^{cx} - e^{cb}}} dx.$$

[$b = 2, 3, 4, 5$ $c = 5, 4, 3, 2$]

Esercizio 5. [5 punti]
Data la funzione

$$f(x) = ax\sqrt{\frac{x-b}{x+c}}$$

a) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (c, f(c))$
b)calcolare $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$

[$a > 0$, $c > b > 0$; prendiamo $c = b + 2, a = 2\sqrt{c} = 2\sqrt{b+2}$, $b = 2, 4, 6, 8$]

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{b} + a - \arcsin|e^{-bx} - 1|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

[$[(a,b) = (2,2); (3,-2); (-2,3); (2,-3)$; $b < -1$ come $f(-x)$ al posto di $f(x)$.]

Svolgimento caso $b > 1$: Dominio: $[-\frac{1}{b}\log 2, +\infty)$. f continua nel suo dominio, $f(-\frac{1}{b}\log 2) = -\frac{1}{b^2}\log 2 + a - \frac{\pi}{2}$. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{b} + a - \arcsin\left(e^{-bx} - 1\right) & -\dfrac{1}{b}\log 2 \le x \le 0 \\ \dfrac{x}{b} + a - \arcsin\left(1 - e^{-bx}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{x}{b} + a - \frac{\pi}{2} + o(1)$ quindi l'asintoto obliquo di f a $+\infty$ è la retta di equazione $\boxed{y = \frac{x}{b} + a - \frac{\pi}{2}}$. Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} + \dfrac{be^{-bx}}{\sqrt{1 - (e^{-bx} - 1)^2}} & -\dfrac{1}{b}\log 2 < x < 0 \\ \dfrac{1}{b} - \dfrac{be^{-bx}}{\sqrt{1 - (1 - e^{-bx})^2}} & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \frac{1}{b} + b, \quad f'_+(0) = \frac{1}{b} - b$$

pertanto $\boxed{x = 0 \text{ punto angoloso, } f(0) = a}$ Inoltre $\boxed{f'_+(-\frac{1}{b}\log 2) = +\infty}$.
Risulta $f'(x) > 0$ se $-\frac{1}{b}\log 2 < x < 0$, mentre per $x > 0$

$$sign(f'(x)) = sign[\sqrt{1 - (1 - e^{-bx})^2} - b^2 e^{-bx}]$$

Essendo

$$\sqrt{1 - (1 - e^{-bx})^2} - b^2 e^{-bx} > 0 \iff (b^4+1)e^{-2bx} - 2e^{-bx} < 0 \iff e^{-bx} < \frac{2}{b^4+1} \iff x > -\frac{1}{b}\log\left(\frac{2}{b^4+1}\right)$$

(si osservi che $-\frac{1}{b}\log(\frac{2}{b^4+1}) > 0$) Perciò f è crescente in $(-\frac{1}{b}\log 2, 0)$ ed in $(-\frac{1}{b}\log(\frac{2}{b^4+1}), +\infty)$, f è decrescente in $(0, -\frac{1}{b}\log(\frac{2}{b^4+1}))$.

$\boxed{x = -\frac{1}{b}\log(\frac{2}{b^4+1}) \text{ punto di minimo relativo.}}$ $\boxed{x = 0 \text{ punto di massimo relativo.}}$

Il caso $b < -1$ corrisponde a considerare $f(-x)$

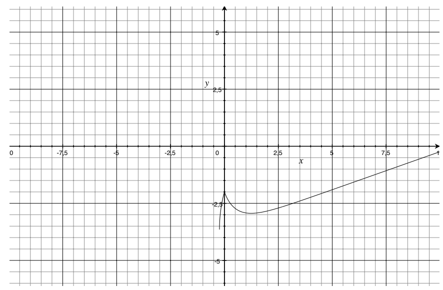

FIGURA 1. Grafico per $a = -2, b = 3$

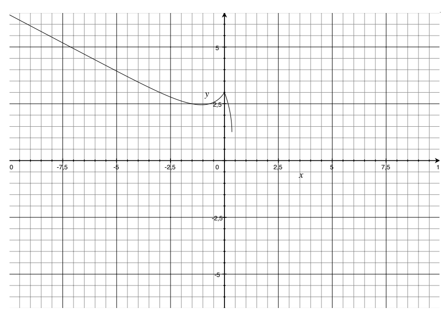

FIGURA 2. Grafico per $a = 3, b = -2$

Esercizio 2. [5 punti] Determinare l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tale che:

$$|z + ia| = |z - b|$$

e disegnarlo sul piano complesso:

$[(2,3);(3,2);(4,2);(2,4))]$

Svolgimento: Sia $z = x + \mathrm{i}y$, la condizione:

$$|z + ia| = |z - b|$$

equivale a

$\sqrt{x^2 + (y+a)^2} = \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \iff x^2+y^2+2ay+a^2 = x^2+b^2-2bx+y^2 \iff 2ay+2bx = b^2-a^2$

quindi i punti $z \in \mathbb{C}$ che verificano la condizione $|z + ia| = |z - b|$ sono tutti e solo quelli che verificano:

$$2aIm(z) + 2bRe(z) = b^2 - a^2$$

Esercizio 3. [7 punti] Mettere in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{(\arctan(ax))^2 - a^2x^2 + e^{x^c} - 1}{2x^{\frac{1}{b}} + 3x^{\frac{1}{b-1}} + e^{-\frac{c}{x}}}$$

$$g(x) = x^3\left(1 - \frac{\cos(cx)}{\sqrt{1+(cx)^{\frac{1}{c}}}}\right)$$

$$h(x) = x^{4-\frac{1}{b}}\log(x^a + e^{\frac{x-c}{x}})$$

$[(a, b, c) = (\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 5), (2, \frac{5}{4}, 6), (3, \frac{3}{2}, 7), (4, 2, 8)]$

Svolgimento: Consideriamo $f(x)$.

Per $x \to 0^+$ si ha: $\arctan ax = ax - \frac{1}{3}a^3x^3 + o(x^4)$, ed essendo $c > 4$, $e^{x^c} = 1 + o(x^4)$; $x^{\frac{1}{b-1}} = o(x^{\frac{1}{b}})$ e $e^{-\frac{c}{x}} = o(x^{\frac{1}{b}})$, quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\arctan(ax))^2 - a^2x^2 + e^{x^c} - 1}{2x^{\frac{1}{b}} + 3x^{\frac{1}{b-1}} + e^{-\frac{c}{x}}} \\ &= \frac{(ax - \frac{a^3x^3}{3} + o(x^4))^2 - a^2x^2 + o(x^4)}{2x^{\frac{1}{b}}(1+o(1))} \\ &= \frac{a^2x^2 - \frac{2a^4x^4}{3} + o(x^4) - a^2x^2 + o(x^4)}{2x^{\frac{1}{b}}(1+o(1))} \\ &= -\frac{1}{3}a^4x^{4-\frac{1}{b}}(1+o(1)) \end{aligned}$$

Per

$$g(x) = x^3\left(1 - \frac{\cos(cx)}{\sqrt{1+(cx)^{\frac{1}{c}}}}\right)$$

essendo $\cos(cx) = 1 - \frac{1}{2}c^2x^2 + o(x^3)$ e $(1+(cx)^{\frac{1}{c}})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(cx)^{\frac{1}{c}} + o(x^{\frac{1}{c}})$ ed $\frac{1}{c} < 2$ si ha

$$g(x) = x^3\left(1 - 1 + \frac{1}{2}(cx)^{\frac{1}{c}} + o(x^{\frac{1}{c}})\right) \sim x^{3+\frac{1}{c}}$$

ed essendo in tutti i casi $3 + \frac{1}{c} < 4 - \frac{1}{b}$ risulta $f = o(g)$

Per lo studio di $h(x)$, essendo $e^{\frac{x-c}{x}} = e^{\frac{-c}{x}}(e + o(1)) = o(x^a)$ per $x \to 0^+$, si ha:

$$h(x) = x^{4-\frac{1}{b}}\log(x^a) \sim x^{4-\frac{1}{b}}\log x$$

Pertanto in questo caso, $h = o(g)$ ma $f = o(h)$

Quindi l'ordine crescente è: g, h, f

Esercizio 4. [7 punti]
Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \geq 0$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\alpha = 0$:

$$\int_b^{+\infty} \frac{(\log x - \log b)^{\frac{\alpha}{3b}}}{\left(x-b\right)^{\alpha}\sqrt{e^{cx}-e^{cb}}}dx.$$

[$b = 2, 3, 4, 5$ $c = 5, 4, 3, 2$]

<u>*Svolgimento:*</u> la funzione integranda

$$f(x) = \frac{(\log x - \log b)^{\frac{\alpha}{3b}}}{\left(x-b\right)^{\alpha}\sqrt{e^{cx}-e^{cb}}}$$

è illimitata per $x \to b^+$, pertanto va studiata l'integrabilità di f sia nell'intorno destro di b che per $x \to +\infty$, e l'integrale converge in senso improprio se convergono entrambi gli integrali

$$\int_b^{b+1} f(x)dx \qquad \int_{b+1}^{+\infty} f(x)dx$$

Per la convergenza del primo integrale $\int_b^{b+1} f(x)dx$ analizziamo il comportamento di f per $x \to b^+$

$$0 \leq f(x) = \frac{(\log(x-b+b) - \log b)^{\frac{\alpha}{3b}}}{\left(x-b\right)^{\alpha}\sqrt{e^{cb}(e^{c(x-b)}-1)}} = \frac{(\log b)^{\frac{\alpha}{3b}}[\log(1+\frac{x-b}{b})-1]^{\frac{\alpha}{3b}}}{(x-b)^{\alpha}e^{\frac{cb}{2}}(e^{c(x-b)}-1)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{C}{(x-b)^{(1-\frac{1}{3b})\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Quindi il primo integrale converge se e solo se $\alpha < \frac{3b}{2(3b-1)}$. Analizziamo il secondo integrale $\int_{b+1}^{+\infty} f(x)dx$.
Per $x \to +\infty$

$$0 < f(x) \sim \frac{(\log x)^{\frac{\alpha}{3b}}}{x^{\alpha}e^{\frac{cx}{2}}} < \frac{C}{x^2} \qquad \text{definitivamente} \quad x \to +\infty$$

Quindi il secondo integrale converge per ogni $\alpha \geq 0$.
In definitiva si ha convergenza dell'integrale se e solo se $\alpha < \frac{3b}{2(3b-1)}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$ cioè

$$I := \int_b^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{cx}-e^{cb}}}dx.$$

Con la sostituzione $y = \sqrt{e^{cx}-e^{cb}}$, cioè $x = \frac{1}{c}\log(y^2+e^{cb})$ si ha $dx = \frac{2y}{c(y^2+e^{cb})}dy$. Quindi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{c(y^2+e^{cb})}dy = \frac{2}{ce^{cb}}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{e^{\frac{cb}{2}}}\right)^2} = \frac{2}{ce^{\frac{cb}{2}}}\arctan\left(\frac{y}{e^{\frac{cb}{2}}}\right)_0^{+\infty} = \frac{\pi}{c\sqrt{e^{cb}}}$$

Esercizio 5. [5 punti] Data la funzione

$$f(x) = ax\sqrt{\frac{x-b}{x+c}}$$

a) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (c, f(c))$
b) calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$

$[a > 0,\ c > b > 0;$ prendiamo $c = b + 2, a = 2\sqrt{c} = 2\sqrt{b+2},\ b = 2, 4, 6, 8]$

Svolgimento: a) Poiché $f(c) = ac\sqrt{\frac{c-b}{2c}} = 2(b+2)$, dobbiamo calcolare la retta tangente al grafico di f nel punto $P = (b+2, 2(b+2))$. Osserviamo che f è derivabile in $x_0 = c$ e poiché risulta

$$f'(x) = a\sqrt{\frac{x-b}{x+c}} + ax\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{x+c}}}\frac{c+b}{(x+c)^2} = a\sqrt{\frac{x-b}{x+c}} + \frac{ax(c+b)}{2(x+c)^2}\sqrt{\frac{x+c}{x-b}}$$

si ha

$$f'(c) = 2(3+2b)$$

Dunque l'equazione della retta tangente al grafico di f in P è

$$y = 2(b+2) + 2(3+2b)(x-c)$$

b) Per calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2\sqrt{b+2}x$, forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x) - 2\sqrt{b+2}x &= 2\sqrt{b+2}x\left(\sqrt{\frac{x-b}{x+b+2}} - 1\right) \\ &= 2\sqrt{b+2}x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2b+2}{x+b+2} + o(\frac{1}{x}) - 1\right) \\ &= -\frac{1}{2}2\sqrt{b+2}(2b+2)(1+o(1)). \end{aligned}$$

Pertanto il limite risulta $-2\sqrt{b+2}(b+1)$.