

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta a.a. 2023/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

A/B/C/D

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |x| \cdot e^{\frac{x+b}{a-x}},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente integrale definito in senso improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x} + 3)^2 \sqrt{x}} dx.$$

Esercizio 3. [6 punti] Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} - b\dot{x} = e^{bt}.$$

Risolvere il problema di Cauchy $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

Esercizio 4. [6 punti] Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + ax + a^2 x^2/2) - \arctan(ax)}{\arctan(bx - b \sin(x)) + \ln(x + bx^4) - \ln(x)}.$$

Esercizio 5. [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \arctan(ax), & x \geq 0; \\ a + bx + cx^2, & x < 0. \end{cases}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Trovare per quali valori di a, b, c la funzione risulta simultaneamente continua, derivabile ed invertibile in $\mathbb{R}$.

1 Soluzioni

1 Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |x| \cdot e^{\frac{x+b}{a-x}},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. $[b > a > 0; (a, b) = (1, 3)(1, 4)(1, 5)(2, 5)]$.

Svolgimento. **1.** L'unica condizione sul dominio è che sia ben definita frazione $\frac{x+16}{3-x}$ che equivale ad imporre $x - a \neq 0$. Quindi il dominio della funzione è

$$D_f := (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

Quindi dobbiamo studiare l'esistenza di asintoti in $\pm\infty$, $a^\pm$. Per quanto riguarda gli asintoti obliqui, si osservi che $x \rightarrow \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \cdot e^{\frac{x+b}{a-x}} = |x| \cdot e^{-1+\frac{a+b}{a-x}} = \frac{|x|}{e} \left(1 + \frac{a+b}{a-x} + o\left(\frac{a+b}{a-x}\right) \right) \\ &= \frac{|x|}{e} \left(1 + \frac{a+b}{-x}(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{e} (|x| - (a+b)\operatorname{segno}(x) + o(1)), \end{aligned}$$

quindi a $+\infty$ la funzione un asintoto di equazione $y = e^{-1}(x - (a+b))$, mentre a $-\infty$ ha un asintoto di equazione $y = e^{-1}(-x + (a+b))$. Si osservi infine che per $x \rightarrow a^\pm$ si ha

$$f(x) = ae^{\frac{a+b}{0^\mp}} = ae^{\mp\infty},$$

da cui $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

2. La funzione risulta derivabile nel resto del suo dominio di definizione (anzi C^∞) in quanto composizione, prodotto e somma di funzioni derivabili. Studiamo la monotonia in $D_f \setminus \{0\}$ tramite il segno della derivata prima. Dopo studieremo la derivabilità in 0. Si osservi che

$$f'(x) = e^{\frac{x+b}{a-x}} \left(\operatorname{segno}(x) + \frac{(a+b)|x|}{(a-x)^2} \right) = e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{1}{(a-x)^2} (\operatorname{segno}(x)(x^2 - 2ax + a^2) + (a+b)|x|)$$

- $x > 0$ si ha

$$f'(x) = e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{1}{(a-x)^2} (x^2 + (b-a)x + a^2)$$

il segno dipende solo dal polinomio $x^2 + (b-a)x + a^2$ che per $x > 0$ è sempre positivo. Di conseguenza $f'(x) > 0$ per $x > 0$ e la funzione risulta **crescente** in $(0, a)$ ed in $(a, +\infty)$.

- $x < 0$ invece

$$f'(x) = -e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{1}{(a-x)^2} (x^2 + (b-a)x + a^2)$$

e il segno dipende dal polinomio $-(x^2 + (b-a)x + a^2)$. Se $(b-a)^2 - 4a^2 > 0$ il polinomio ha radici $x_{\pm} = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4a^2}}{2}$: Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} < 0, & x \in (-\infty, x_-), & \text{decescente} \\ = 0, & x = x_-, & \text{min relativo} \\ > 0, & x \in (x_-, x_+), & \text{crescente} \\ = 0, & x = x_+, & \text{max relativo} \\ < 0, & x \in (x_+, 0), & \text{decescente} \end{cases}$$

Se $(b-a)^2 - 4a^2 = 0$ il polinomio è sempre negativo tranne in $-(b-a)/2$ dove ha uno zero con molteplicità doppia ($-(b-a)/2$ è un punto di flesso). Quindi in tal caso f è decrescente per $x < 0$

Se $(b-a)^2 - 4a^2 < 0$, il polinomio è sempre negativo, quindi f è decrescente per $x < 0$

Rimane da discutere la derivabilità della funzione in $x = 0$. Essendo la funzione continua in $x = 0$ ed esistendo la derivata prima della funzione in un intorno destro e sinistro di tale punto possiamo studiare l'esistenza della derivata prima utilizzando il corollario del teorema di Lagrange:

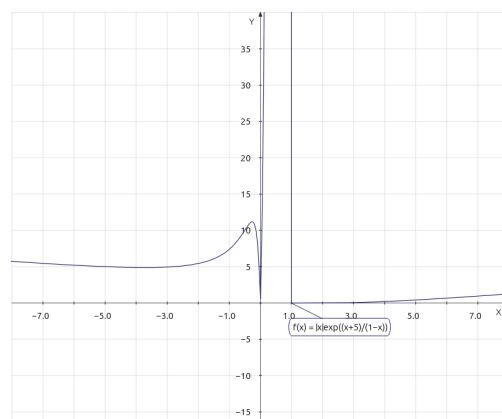
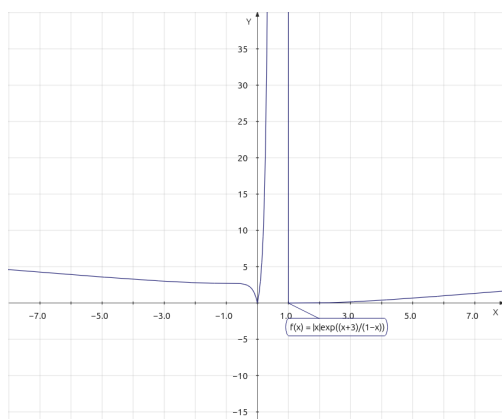
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{1}{(a-x)^2} (x^2 + (b-a)x + a^2) = e^{b/a},$$

mentre

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^{\frac{x+b}{a-x}} \frac{1}{(a-x)^2} (x^2 + (b-a)x + a^2) = -e^{b/a}.$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Inoltre dato che la derivata destra è positiva e quella sinistra è negativa si tratta di un punto di **minimo relativo**.

Grafici della funzione per $(1, 3)$ e $(1, 5)$



2 Calcolare il seguente integrale definito in senso improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x} + 3)^2 \sqrt{x}} dx, \quad [3 \neq a > 0].$$

Svolgimento. Sostituendo $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ e integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x} + 3)^2 \sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{\ln(t^2 + (3+a)t + 3a)}{(t+3)^2} dt \\ &= -2 \frac{\ln(t^2 + (3+a)t + 3a)}{t+3} + 2 \int \frac{2t+3+a}{(t+3)(t^2 + (3+a)t + 3a)} dt \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo termine si ha

$$\int \frac{2t+3+a}{(t+3)(t^2 + (3+a)t + 3a)} dt = \int \frac{2t+3+a}{(t+3)^2(t+a)} dt$$

che si decompone in fratti semplici nel seguente modo

$$\frac{2t+3+a}{(t+3)^2(t+a)} = \frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+3} + \frac{C}{(t+3)^2}$$

e le costanti soddisfano la relazione

$$A = \frac{1}{3-a}, \quad C = 1, \quad B + A = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{3-a}.$$

Quindi

$$\int \frac{2t+3+a}{(t+3)^2(t+a)} dt = \int \left(\frac{1}{3-a} \frac{1}{t+a} - \frac{1}{3-a} \frac{1}{t+3} + \frac{1}{(t+3)^2} \right) dt = \frac{1}{3-a} \ln \left| \frac{t+a}{t+3} \right| - \frac{1}{t+3}$$

e una primitiva della funzione integranda espressa nella variabile t è la funzione

$$F(t) = -2 \frac{\ln(t^2 + (3+a)t + 3a)}{t+3} + \frac{2}{3-a} \ln \left| \frac{t+a}{t+3} \right| - \frac{2}{t+3}$$

Infine

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x + (3+a)\sqrt{x} + 3a)}{(\sqrt{x} + 3)^2 \sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \frac{2 \ln(3a)}{3} - \frac{2}{3-a} \ln \left(\frac{a}{3} \right) + 2/3.$$

□

3 Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} - b\dot{x} = e^{bt} ,$$

con $b \neq 0$. Risolvere il problema di Cauchy $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

Svolgimento. Si tratta di una equazione del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. Troviamo la soluzione generale dell'omogenea

$$\ddot{x} - b\dot{x} = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - b\lambda = 0$ sono 0 e b . Quindi la generica soluzione dell'omogenea è

$$x_{om}(t) = A + Be^{bt}$$

Il termine noto è la funzione $f(t) = te^{bt}$. Applichiamo il metodo di similitudine cercando una soluzione particolare della forma

$$y(t) = tKe^{bt}$$

in quanto b è radice del polinomio caratteristico. Imponendo che y verifichi l'equazione differenziale generale si ha

$$2bKe^{bt} + tb^2Ke^{bt} - bKe^{bt} - tb^2Ke^{bt} = be^{bt}K = e^{bt} \Rightarrow K = 1/b$$

Di conseguenza

$$y(t) = \frac{te^{bt}}{b}$$

. La soluzione generale dell'equazione sarà

$$x_{gen}(t) = x_{om}(t) + y(t) = A + Be^{bt} + \frac{te^{bt}}{b}$$

Per il problema di Cauchy si ha

$$x(0) = A + B = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = bB + \frac{1}{b} = 0$$

da cui $B = -\frac{1}{b^2}$ mentre $A = \frac{1}{b^2}$. In conclusione

$$x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{b^2}(1 - e^{bt} + bte^{bt})$$

□

4 Studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + ax + a^2x^2/2) - \arctan(ax)}{\arctan(bx - b \sin(x)) + \ln(x + bx^4) - \ln(x)} .$$

Svolgimento. Calcoliamo l'ordine di infinitesimo del numeratore:

$$\begin{aligned} \ln(1 + ax + a^2x^2/2) - \arctan(ax) &= ax + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{(ax + a^2x^2/2)^2}{2} + \frac{(ax + a^2x^2/2)^3}{3} + \\ &+ o(ax + a^2x^2/2)^3 - ax + \frac{a^3x^3}{3} + o(x^3) \\ &= ax + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{(ax + a^2x^2/2)^2}{2} + \frac{(ax + a^2x^2/2)^3}{3} - ax + \frac{a^3x^3}{3} + o(x^3) \\ &= ax + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{1}{2}(a^2x^2 + a^3x^3) + \frac{a^3x^3}{3} - ax + \frac{a^3x^3}{3} + o(x^3) \\ &= -\frac{a^3x^3}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + \frac{a^3x^3}{3} + o(x^3) \\ &= \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3) . \end{aligned}$$

Per il denominatore si ha :

$$\begin{aligned} \arctan(bx - b \sin(x)) + \ln(x + bx^4) - \ln(x) &= \arctan(bx - b \sin(x)) + \ln(1 + bx^3) \\ &= \arctan(bx^3/6 + o(x^3)) + bx^3 + o(x^3) = bx^3/6 + bx^3 + o(x^3) \\ &= \frac{7b}{6}x^3 + o(x^3) . \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + ax + a^2x^2/2) - \arctan(ax)}{\arctan(bx - b \sin(x)) + \ln(x + bx^4) - \ln(x)} &= \frac{\frac{a^3x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{7b}{6}x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{a^3}{7b}(1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{a^3}{7b} \end{aligned}$$

□

5 Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \arctan(\alpha x), & x \geq 0; \\ a + bx + cx^2, & x < 0 \end{cases}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trovare per quali valori di a, b, c la funzione risulta simultaneamente continua, derivabile e invertibile in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Per $x \neq 0$ si tratta di una funzione di classe C^∞ . Quando andiamo a vedere il comportamento in 0. Imponiamo la continuità:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + bx + cx^2 = a = f(0) = \arctan(0) = 0 \iff a = 0.$$

Imponiamo ora che sia derivabile in 0. Si osservi che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}, & x > 0; \\ b + 2cx, & x < 0 \end{cases}$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{1+(\alpha x)^2} = \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = b + 2cx = b$$

da cui se $b = \alpha$ si ha che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e, in particolare, $f'(0) = \alpha$. Si osservi che abbiamo usato il corollario del Teorema di Lagrange: f è continua in 0 e derivabile in un intorno di 0. L'esistenza del limite delle derivate prime in 0 implica che f è derivabile con derivata uguale al limite.

Per quanto riguarda l'invertibilità, noi sappiamo che per $x > 0$, $f'(x) = \frac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}$ ossia f è strettamente monotona crescente o decrescente in tale regione a seconda del segno di α . Affinchè f sia invertibile in tutto $\mathbb{R}$ dobbiamo imporre che il segno della derivata prima di f per $x < 0$ sia concorde al segno della derivata prima di f per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\alpha x + cx^2) = \alpha + 2cx, \quad x < 0$$

Se $\boxed{\alpha < 0}$, per ogni $c \geq 0$ la funzione è strettamente decrescente in tutto $\mathbb{R}$ quindi invertibile. Infatti se $c < 0$ allora la derivata prima si annullerebbe per $x = \frac{-\alpha}{2c} < 0$, ossia avrebbe un cambiamento di segno nella regione $x < 0$ e non sarebbe invertibile. Se $\boxed{\alpha > 0}$, seguendo un ragionamento analogo a prima, per ogni $c \leq 0$ la funzione è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$ quindi invertibile.

In conclusione i valori richiesti dal problema sono

$$a = 0, \quad b = \alpha, \quad c \in -\text{segno}(\alpha)[0, +\infty).$$

□