Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta febbraio 2022 – I turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{ax}+b+2x\log|x|-x\log(x^2+bx-1)\right)\sqrt{cx^2-x\sin x}.$$

$[(a,b,c)=(3,-1,9),(5,1,4),(2,-2,4),(4,2,9)]$

Svolgimento: Studiamo lo sviluppo di Taylor dei termini nel limite. Per i termini che contengono il logaritmo abbiamo

$$\begin{aligned}2x\log|x|-x\log\left(x^2+bx-1\right)&=-x\log\left(\frac{x^2+bx-1}{x^2}\right)\\&=-x\log\left(1+\frac{b}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\\&=-x\left(\left(\frac{b}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&=-b+\frac{1}{x}+\frac{b^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Per il termine con la radice si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{cx^2-x\sin(x)}&=\sqrt{c}|x|\sqrt{1-\frac{\sin(x)}{x}}\\&=-\sqrt{c}x(1+o(1)).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\left(e^{ax}+b+2x\log|x|-x\log(x^2+bx-1)\right)\sqrt{cx^2-x\sin x}&=\left(e^{ax}+\frac{1}{x}+\frac{b^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)(-\sqrt{c}x(1+o(1)))\\&=-e^{ax}\sqrt{c}x-\left(1+\frac{b^2}{2}\right)\sqrt{c}+o(1),\end{aligned}$$

Poiché, per $a>0$,

$$\lim_{x\to-\infty}xe^{ax}=0,$$

il risultato del limite è

$$-\left(1+\frac{b^2}{2}\right)\sqrt{c}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 2, -2, 1, -1]$

Svolgimento:
Dominio: La funzione è definita fintanto che $e^{ax} - 2 \neq 0$. Pertanto il dominio D è

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\ln 2}{a} \right\}.$$

Per semplicità sia $b = \frac{\ln 2}{a}$.
Limiti di frontiera: Consideriamo il caso $a > 0$, i risultati per il caso $a < 0$ sono indicati tra parentesi. Si ha

$$\lim_{x \to b^-} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = -\infty, \quad (+\infty \quad \text{per } a < 0)$$

e

$$\lim_{x \to b^+} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = +\infty, \quad (-\infty \quad \text{per } a < 0)$$

pertanto la funzione ha un asintoto verticale in b.
Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = -\frac{1}{2}, \quad (0 \quad \text{per } a < 0)$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{|e^{ax} - 1|}}{e^{ax} - 2} = 0, \quad (-\frac{1}{2} \quad \text{per } a < 0)$$

pertanto $y = -1/2$ è asintoto orizzontale per la funzione per $x \to -\infty$ ($+\infty$ per $a < 0$) e $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione per $x \to +\infty$. ($-\infty$ per $a < 0$)
Derivata: La funzione è derivabile in $D \setminus \{0\}$.
Per $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{|a| e^{2ax}}{2(e^{ax} - 2)^2 \sqrt{|e^{ax} - 1|}},$$

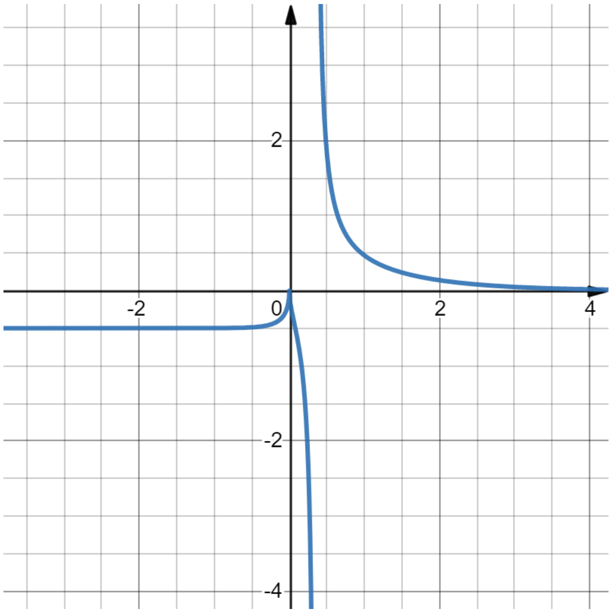
e per $x < 0$

$$f'(x) = \frac{|a| e^{2ax}}{2(e^{ax} - 2)^2 \sqrt{|e^{ax} - 1|}}.$$

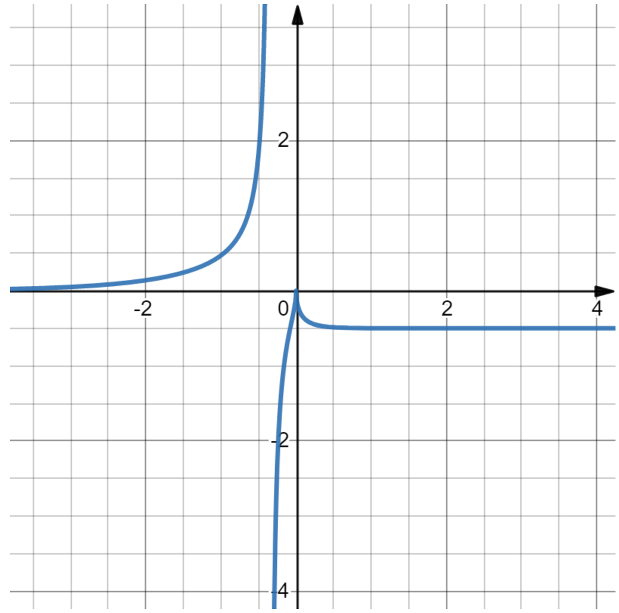
Abbiamo che f è monotona crescente per $x < 0$ e monotona decrescente per $x > 0$.
Pertanto 0 è un *punto di massimo* relativo con $f(0) = 0$.
Poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

è una cuspide.



(A) Grafico della funzione f con $a = 2$.



(B) Grafico della funzione f con $a = -2$.

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{2a} \frac{\log^\alpha(1-a+x)}{x^{1+\alpha}} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Integrale improprio per l' estremo in a. La funzione integranda è di segno costante per $x > a$ si può quindi usare un criterio di equivalenza

$$\frac{\log^\alpha(1-a+x)}{x^{1+\alpha}} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} \sim_a \frac{\sqrt{2a}}{a^{1+\alpha}} \frac{\log^\alpha(1-(x-a))}{\sqrt{x-a}}$$
$$\sim_a \frac{\sqrt{2}}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} \frac{(x-a)^\alpha}{\sqrt{x-a}} = \frac{\sqrt{2}}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} (x-a)^{\alpha-1/2}$$

Ora l 'integrale

$$\int_a^{2a} (x-a)^{\alpha-1/2} dx$$

è un integrale di Riemann che converge se e solo se $\alpha - 1/2 > -1$, ovvero $\alpha > -\frac{1}{2}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$. Consideriamo il cambio di variabile

$$t = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}},$$

pertanto avremo

$$x = a\frac{1+t^2}{t^2-1} \quad \text{e} \quad dx = -\frac{4at}{(t^2-1)^2} dt.$$

Quindi

$$\int_a^{2a} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} dx = 4 \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4-1} dt$$
$$= \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt + 2 \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{3}\right).$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x \log x} + \dfrac{a}{x} \\ y(e) = a \end{cases}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si tratta di un' equazione ordinaria lineare del primo ordine non omogenea. Si ha

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log(|\log(x)|) + \text{cost}.$$

Pertanto la soluzione generale sarà della forma

$$y(x) = \log(x) \left(C + a \int \frac{dx}{x \log(x)} \right) = \log(x) \left(C + a \log(|\log(x)|) \right).$$

La costante C è data dalla condizione iniziale $y(e) = a$ che implica $C = a$.

Esercizio 5 [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \pm 1$ per la seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2}\sin(\pi x), \qquad \left[f(x) = e^{-x^2}\sin(\pi x) \right].$$

Svolgimento: Consideriamo il primo caso: $f(x) = e^{x^2}\sin(\pi x)$ e $x_0 = 1$, gli altri casi si trattano in maniera simile.
Notiamo che

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi(x-1)+\pi) = -\sin(\pi(x-1)),$$

pertanto

$$\sin(\pi x) = -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^4).$$

Quindi sarà sufficiente sviluppare e^{x^2} fino all' ordine 3. Ora

$$x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

e

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \text{per } y \to 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
e^{x^2} &= e^{1+2(x-1)+(x-1)^2} \\
&= ee^{2(x-1)}e^{(x-1)^2} \\
&= e\left(1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)\right)\left(1 + (x-1)^2 + o((x-1)^3)\right) \\
&= e\left(1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{10}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)\right).
\end{aligned}$$

Moltiplicando i due fattori abbiamo

$$e^{x^2}\sin(\pi x) = -e\pi(x-1) - 2e\pi(x-1)^2 + \left(-3e\pi + \frac{\pi^3}{6}e\right)(x-1)^3 + \left(-\frac{10}{3}e\pi + \frac{\pi^3}{3}e\right)(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$