

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/07/2021

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Data la funzione:

$$f(x) = \frac{ae^{bx} + 2^{bx}}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2}},$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$[(a, b) = (2, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)]$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Pertanto, per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2 \log\left(1 + \frac{b}{x}\right)\right) = \exp\left(x^2\left(\frac{b}{x} - \frac{b^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(bx - \frac{b^2}{2} + o(1)\right) = e^{-\frac{b^2}{2}} e^{bx} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} ae^{bx} + 2^{bx} &= ae^{bx}(1 + o(1)) \text{ per } \rightarrow +\infty, \\ ae^{bx} + 2^{bx} &= 2^{bx}(1 + o(1)) \text{ per } \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Si conclude

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ae^{bx} + 2^{bx}}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2}} &= ae^{\frac{b^2}{2}}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ae^{bx} + 2^{bx}}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{bx}(1 + o(1))}{e^{-\frac{b^2}{2}} e^{bx}(1 + o(1))} = +\infty. \end{aligned}$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(e^{a|x|} + e^{-a|x|} - 2) - (a + 1)|x|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è pari.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Per $x \rightarrow +\infty$ risulta

$$f(x) = \log(e^{ax} + e^{-ax} - 2) - (a + 1)x = \log(1 + e^{-2ax} - 2e^{-ax}) - x = -x + o(1)$$

$y = -x$ asintoto obliquo a $+\infty$.

Per $x > 0$: $f'(x) = a \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax} - 2} - a - 1 = \frac{-e^{ax} - (2a+1)e^{-ax} + 2a+2}{e^{ax} + e^{-ax} - 2}$, pertanto f è crescente per $0 < x \leq \frac{\log(2a+1)}{a}$ e f è decrescente per $x \geq \frac{\log(2a+1)}{a}$.

$x = \frac{\log(2a+1)}{a}$ punto di massimo assoluto.

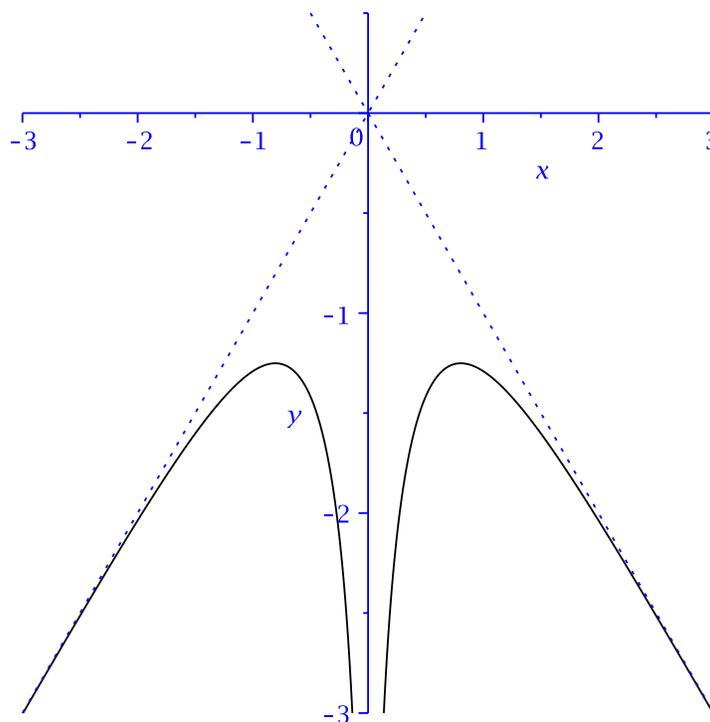


FIGURE 1. Grafico di $f(x) = \log(e^{2|x|} + e^{-2|x|} - 2) - 3|x|$.

Esercizio 3. [8 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{x-b}{(ax-x^2)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[(a, b) = (2, 5), (3, 4), (6, 3), (5, 2)]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \frac{-b}{(ax)^\alpha} \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha < 1$. Inoltre

$$f(x) \sim \frac{a-b}{a^\alpha(a-x)^\alpha} \text{ per } x \rightarrow a^-.$$

Pertanto f è integrabile in $(\frac{a}{2}, a)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Quindi f è integrabile in $(0, a)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^a \frac{x-b}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \int_0^a \frac{x-b}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx - b \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} dx.$$

Calcoliamo i due integrali: con la sostituzione $\sqrt{a-x} = t$ e, successivamente, $t = \sqrt{a} \sin u$

$$\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{a-t^2} dt = 2a \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \left[a \frac{2u + \sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi/2} = a \frac{\pi}{2}.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ e si ha

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a-t^2}} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t}{\sqrt{a}})^2}} dt = \left[2 \arcsin \frac{t}{\sqrt{a}} \right]_0^{\sqrt{a}} = \pi.$$

Si conclude:

$$\int_0^a \frac{x-b}{\sqrt{ax-x^2}} dx = a \frac{\pi}{2} - b\pi.$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere in \mathbb{C} la seguente equazione:

$$|z|((1+i)z)^2 = 2a^3.$$

$$[a = \pm 1, \pm 2]$$

Svolgimento: Consideriamo $a > 0$. Poiché $(1+i)^2 = 2i$, l'equazione può risciversi nella forma:

$$i|z|z^2 = a^3.$$

Uguagliando i moduli di ambo i membri si ha:

$$|z|^3 = a^3 \iff |z| = a.$$

Si deduce che le eventuali soluzioni sono della forma $z = |a|e^{i\theta}$ da cui, sostituendo nell'equazione

$$ie^{2i\theta} = 1$$

da cui segue

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)} = 1.$$

Pertanto

$$\frac{\pi}{2} + 2\theta = 2k\pi.$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = ae^{i(-\frac{\pi}{4}+k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$z = ae^{-i\frac{\pi}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \quad z = ae^{-i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = a\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$