

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2021

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(na)^{\frac{1}{nb}} - n}{\log(cn)}.$$

$$[(a, b, c) = (2, 1, 2), (1, 4, 2), (2, 2, 3), (3, 3, 1)]$$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$e^y = 1 + y + o(y).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}(na)^{\frac{1}{nb}} &= \exp\left(\frac{1}{nb} \log(na)\right) = \exp\left(\frac{\log n + \log a}{nb}\right) \\ &= 1 + \frac{\log n}{nb} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\end{aligned}$$

da cui segue

$$n(na)^{\frac{1}{nb}} - n = \frac{\log n}{b} + o(\log n).$$

D'altra parte

$$\log(cn) = \log n + o(\log n).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{1}{b}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan \left((a - x) \log(|a - x|) \right)$$

specificando: dominio, eventuali asymptoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = (2, 3, 4, 5)]$$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } -\infty, y = -\frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } +\infty.$$

Per $x \neq a$: $f'(x) = \frac{-\log(|a-x|)-1}{1+(a-x)^2 \log^2(|a-x|)}$, pertanto f è decrescente per $x \leq a - \frac{1}{e}$ e $x \geq a + \frac{1}{e}$ f è crescente per $a - \frac{1}{e} \leq x < a$ e $a < x \leq a + \frac{1}{e}$.

$$x = a - \frac{1}{e} \text{ punto di minimo relativo, } x = a + \frac{1}{e} \text{ punto di massimo relativo.}$$

$$f\left(a - \frac{1}{e}\right) = -\arctan \frac{1}{e}, \quad f\left(a + \frac{1}{e}\right) = \arctan \frac{1}{e}.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty.$$

$$x = a \text{ punto a tangente verticale.}$$

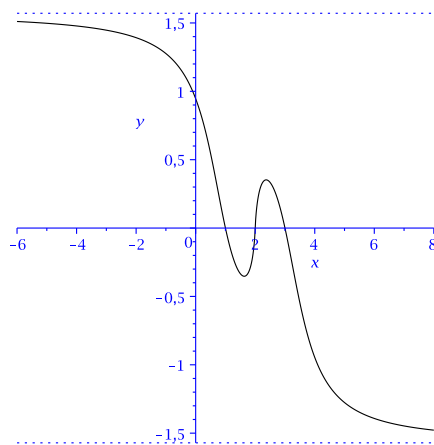


FIGURE 1. Grafico di $f(x) = \arctan \left((2 - x) \log(|2 - x|) \right)$.

Esercizio 3. [8 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{(1-ax)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \sqrt{a^3} \frac{\sqrt{1-ax}}{(1-ax)^\alpha} = a^{2-\alpha} \frac{1}{(\frac{1}{a} - x)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \text{ per } x \rightarrow \frac{1}{a}^-.$$

Pertanto f è integrabile in $(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a})$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{1-ax}$ e si ha

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{\sqrt{x^3}} dx = 2\sqrt{a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t \frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} dt.$$

Risolviamo l'ultimo integrale integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int t \frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} dt &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)' \arcsin t dt = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t - \int \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t - \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} + c \end{aligned}$$

Si conclude:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{\sqrt{x^3}} dx &= 2\sqrt{a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t \frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} dt = 2\sqrt{2a} \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{a} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{2a} - \sqrt{a} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 3$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{\sin x}{\log(e + ax)}.$$

$$[a = \pm 1, \pm 2]$$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad \log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \frac{1}{1 + y} = 1 - y + y^2 + o(y^2).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log(e + ax)} &= \frac{1}{1 + \log(1 + \frac{a}{e}x)} = \frac{1}{1 + \frac{a}{e}x - \frac{a^2}{2e^2}x^2 + o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{a}{e}x + \frac{a^2}{2e^2}x^2 + \left(\frac{a}{e}x + o(x)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{a}{e}x + \frac{a^2}{2e^2}x^2 + \frac{a^2}{e^2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{a}{e}x + \frac{3a^2}{2e^2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\log(e + ax)} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{a}{e}x + \frac{3a^2}{2e^2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x - \frac{a}{e}x^2 + \frac{3a^2}{2e^2}x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{a}{e}x^2 + \frac{9a^2 - e^2}{6e^2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$