# Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
# Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/01/2021 – II

| | |
|---|---|
| **Cognome**: (in `STAMPATELLO`) | |
| **Nome**: (in `STAMPATELLO`) | |
| **Matricola**: | |
| **Titolare del corso**: | |
| **Esame orale**: | |

| Esercizio | Punteggio |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| **Totale** | |

A/B/C/D

---

**Esercizio 1. [8 punti]** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n^3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left((n+1)^{\frac{5}{2}}-n^{\frac{5}{2}}\right)$$

$[a=\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$

*Svolgimento:* Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to0^+$:

$$\sin y=y-\frac{y^3}{6}+o(y^4),\quad (1+y)^{\frac{5}{2}}=1+\frac{5}{2}y+o(y).$$

Pertanto

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n^3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n^3}}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n^3}}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n^3}}-\frac{1}{6\sqrt{n^3}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

da cui segue

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n^3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}=-\frac{6a+1}{6}\frac{a}{\sqrt{n^3}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'altra parte

$$(n+1)^{\frac{5}{2}}-n^{\frac{5}{2}}=n^{\frac{5}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}-n^{\frac{5}{2}}=n^{\frac{5}{2}}\left(1+\frac{5}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n^{\frac{5}{2}}=\frac{5\sqrt{n^3}}{2}+o\left(\sqrt{n^3}\right).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{5(6a+1)}{12}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .......................................... Nome (in STAMPATELLO):..........................................

**Esercizio 2. [8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$e^{\pm\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2 \pm x}, \qquad \left[e^{\pm\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 \pm 2x}\right]$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

*Svolgimento:* Consideriamo la funzione

$$e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2 + x}.$$

Dominio: $\{x \leq -1\} \cup \{x > 0\}$. Inoltre

$$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \leq -1, \forall x > 0, \qquad f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale.}}$

Per $x \to +\infty$ si ha:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+1+o(1).$$

D'altra parte, per $x \to -\infty$:

$$f(x) = -xe^{\frac{1}{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x-1+o(1).$$

$\boxed{y = x+1 \text{ asintoto obliquo a } +\infty,\ y = -x-1 \text{ asintoto obliquo a } -\infty.}$

Per $x < -1$ e $x > 0$: $f'(x) = e^{\frac{1}{2x}}\frac{2x^3-x}{2x^2\sqrt{x^2+x}}$, pertanto $f$ è decrescente per $x < -1$ e $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $f$ è crescente per $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{2x}}\frac{2x^3-x}{2x^2\sqrt{x^2+x}} = -\infty.$$

$\boxed{x = -1 \text{ punto di cuspide.}}$

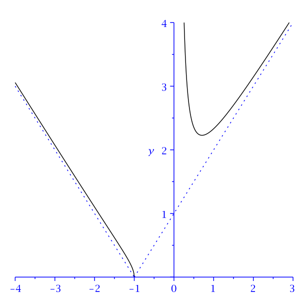


FIGURA 1. Grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .......................................... Nome (in STAMPATELLO):..........................................

---

**Esercizio 3.** [**8 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1-\sqrt{ax})}{\sqrt{x}(1-ax)^{\alpha}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 5, 6]$

<u>*Svolgimento*</u>*:* Risulta:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Quindi $f$ è integrabile in $(0, \frac{1}{2a})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'altra parte

$$f \sim \sqrt{a}\frac{1-\sqrt{ax}}{(1-ax)^{\alpha}} = \frac{\sqrt{a}}{(1+\sqrt{ax})(1-ax)^{\alpha-1}} = \frac{1}{2a^{\alpha-\frac{3}{2}}(\frac{1}{a}-x)^{\alpha-1}} \text{ per } x \to \frac{1}{a}^{-}.$$

Quindi $f$ è integrabile in $(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a})$ se e solo se $\alpha < 2$.
Pertanto $f$ è integrabile in $(0, \frac{1}{a})$ se e solo se $\alpha < 2$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1-\sqrt{ax})}{\sqrt{x}} dx.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{ax}$ e, successivamente, $1 - t = s$ l'integrale diventa:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1-\sqrt{ax})}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^1 \arcsin(1-t)dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^1 \arcsin s ds.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale integrando per parti:

$$\int \arcsin s ds = \int (s)' \arcsin s ds = s \arcsin s - \int \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} ds = s \arcsin s + \sqrt{1-s^2} + c.$$

Si conclude:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1-\sqrt{ax})}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^1 \arcsin s ds = \frac{1}{\sqrt{a}}(\pi - 2).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .......................................... Nome (in STAMPATELLO):..........................................

**Esercizio 4. [6 punti]** Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z^3|z| + 81 = 0 \qquad \Big(z^3|z| + 81\mathrm{i} = 0, \quad z^3|z| + 16 = 0, \quad z^3|z| + 16\mathrm{i} = 0\Big).$$

*Svolgimento:* Consideriamo l'equazione

$$z^3|z| + 81 = 0$$

e riscriviamola nella forma

$$z^3|z| = -81.$$

Uguagliando i moduli di ambo i menbri si ha:

$$|z|^4 = 81 \Longleftrightarrow |z| = 3.$$

Si deduce che le eventuali soluzioni sono della forma $z = 3e^{\mathrm{i}\theta}$ da cui, sostituendo nell'equazione,

$$81e^{3\mathrm{i}\theta} + 81 = 0$$

da cui segue

$$e^{3\mathrm{i}\theta} = -1 = e^{\mathrm{i}\pi}.$$

Pertanto

$$\theta = \frac{\pi}{3}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}(2k+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$z = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}), \quad z = 3e^{\mathrm{i}\pi} = -3, \quad z = 3e^{\mathrm{i}\frac{5}{3}\pi} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}\mathrm{i}).$$