Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/01/2021 – III

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [**8 punti**] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{ax^2}-ax\arctan x\right)^{-\frac{1}{ax^4}}.$$

[$a=2,-2,4,-4$]

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2),\quad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\log\left(e^{ax^2}-ax\sin x\right)&=\log\left(1+ax^2+\frac{a^2}{2}x^4-ax^2+\frac{a}{3}x^4+o(x^5)\right)\\&=\log\left(1+\frac{3a+2}{6}ax^4+o(x^5)\right)\\&=\frac{3a+2}{6}ax^4+o(x^5)\end{aligned}$$

da cui segue

$$\left(e^{ax^2}-ax\sin x\right)^{-\frac{1}{ax^4}}=\exp\left(-\frac{1}{ax^4}\log\left(e^{ax^2}-ax\sin x\right)\right)=\exp\left(-\frac{3a+2}{6}+o(x)\right).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{-\frac{3a+2}{6}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 - a^2)\log(|x^2 - a^2|) - x^2$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}]$

Svolgimento: f è pari. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$.
Risulta:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = -a^2.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$\boxed{f \text{ non ammette asintoti a } +\infty \text{ e } -\infty.}$

Per $0 \le x < a$ e $x > a$: $f'(x) = 2x\log(|x^2 - a^2|) + 2x - 2x = 2x\log(|x^2 - a^2|)$, pertanto f è crescente per $0 < x \le \sqrt{a^2 - 1}$ e $x \ge \sqrt{a^2 + 1}$ e f è decrescente per $\sqrt{a^2 - 1} \le x \le \sqrt{a^2 + 1}$.

$\boxed{x = \sqrt{a^2 - 1} \text{ punto di massimo relativo, } x = \sqrt{a^2 + 1} \text{ punto di minimo relativo.}}$

$\boxed{f(\sqrt{a^2 - 1}) = 1 - a^2,\ f(\sqrt{a^2 + 1}) = -a^2 - 1.}$

Infine:

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} 2x\log(|x^2 - a^2|) = -\infty.$$

$\boxed{x = -a,\ x = a \text{ punti di cuspide.}}$

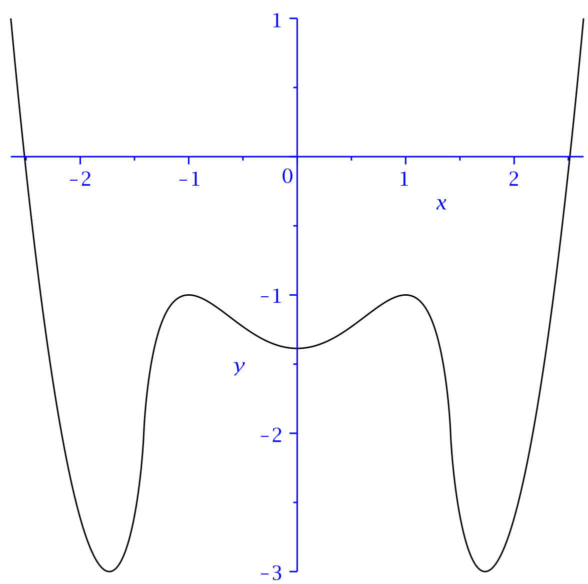

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = (x^2 - 2)\log(|x^2 - 2|) - x^2$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**8 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax) + \sin^2(ax) - 1)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Riscriviamo l'integrale nella forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax) + \sin^2(ax) - 1)^\alpha} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax) - \cos^2(ax))^\alpha} dx.$$

Risulta:

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^\alpha (1 - \cos(ax))^\alpha} \sim 2^\alpha \frac{ax}{(ax)^{2\alpha}} = \frac{2^\alpha}{(ax)^{2\alpha - 1}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Quindi f è integrabile in $(0, \frac{\pi}{4a})$ se e solo se $\alpha < 1$. D'altra parte

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^\alpha (1 - \cos(ax))^\alpha} \sim \frac{1}{(\cos(ax))^\alpha} = \frac{1}{(\sin(\frac{\pi}{2} - ax))^\alpha} \sim \frac{1}{a^\alpha (\frac{\pi}{2a} - x)^\alpha}.$$

Quindi f è integrabile in $(\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{2a})$ se e solo se $\alpha < 1$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{\cos(ax) - \cos^2(ax)}} dx.$$

Con la sostituzione $\cos(ax) = t$ e, successivamente, $\sqrt{t} = s$, l'integrale diventa:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{\cos(ax) - \cos^2(ax)}} dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t - t^2}} dt = \frac{2}{a} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds.$$

Essendo $\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \arcsin s + c$ si deduce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{\cos(ax) - \cos^2(ax)}} dx = \frac{\pi}{a}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \pm\frac{\pi}{2a}$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sin(ax)}.$$

$[a = 1, 2]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5), \qquad \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2).$$

Posto $y = x - (\pm\frac{\pi}{2a})$:

$$f(x) = \frac{1}{\sin(ax)} = \frac{1}{\sin(ay \pm \frac{\pi}{2})} = \pm\frac{1}{\cos(ay)}.$$

Per $y \to 0$ risulta

$$\cos(ay) = 1 - \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^4}{24}y^4 + o(y^5)$$

da cui segue

$$\frac{1}{\cos(ay)} = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^4}{24}y^4 + o(y^5)} = 1 + \frac{a^2}{2}y^2 - \frac{a^4}{24}y^4 + \Big(-\frac{a^2}{2}y^2 + o(y^3)\Big)^2 + o(y^5)$$

$$= 1 + \frac{a^2}{2}y^2 - \frac{a^4}{24}y^4 + \frac{a^4}{4}y^4 + o(y^5) = 1 + \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{5}{24}a^4y^4 + o(y^5).$$

Si deduce che, per $x \to \pm\frac{\pi}{2a}$:

$$f(x) = \pm 1 \pm \frac{a^2}{2}\Big(x \mp \frac{\pi}{2a}\Big)^2 \pm \frac{5}{24}a^4\Big(x \mp \frac{\pi}{2a}\Big)^4 + o\Big(\Big(x \mp \frac{\pi}{2a}\Big)^5\Big).$$