Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 16 Febbraio 2021 - II

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+A)^n-an!)(e^{B\sqrt{n}}+bn^d+c)}{(n+B\sqrt{n}+C)^n}$$

con $B>0$ e $A,C,a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t\to 0$:

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad e^t=1+t+o(t).$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$,

$$\begin{aligned}(n+A)^n-an! &= n^n\left(\left(1+\frac{A}{n}\right)^n+o(1)\right)=n^n\left(e^{n\log(1+\frac{A}{n})}+o(1)\right)\\ &= n^n\left(e^{n(\frac{A}{n}+o(\frac{1}{n}))}+o(1)\right)=n^n\left(e^{A+o(1)}+o(1)\right)=n^ne^A(1+o(1)).\end{aligned}$$

Inoltre, dato che $\lim_{n\to\infty}n^de^{-B\sqrt{n}}=0$,

$$e^{B\sqrt{n}}+bn^d+c=e^{B\sqrt{n}}(1+o(1)).$$

Infine

$$\begin{aligned}(n+B\sqrt{n}+C)^n &= n^n\left(1+\frac{B}{\sqrt{n}}+\frac{C}{n}\right)^n=n^ne^{n\log(1+\frac{B}{\sqrt{n}}+\frac{C}{n})}\\ &= n^ne^{n(\frac{B}{\sqrt{n}}+\frac{C}{n}-\frac{1}{2}(\frac{B}{\sqrt{n}}+\frac{C}{n})^2+o(\frac{1}{n}))}=n^ne^{n(\frac{B}{\sqrt{n}}+\frac{C}{n}-\frac{B^2}{2n}+o(\frac{1}{n}))}\\ &= n^ne^{B\sqrt{n}+C-\frac{B^2}{2}+o(1)}=n^ne^{B\sqrt{n}}e^{C-\frac{B^2}{2}}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Così si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+A)^n-an!)(e^{B\sqrt{n}}+bn^d+c)}{(n+B\sqrt{n}+C)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^ne^A(1+o(1))\cdot e^{B\sqrt{n}}(1+o(1))}{n^ne^{B\sqrt{n}}e^{C-\frac{B^2}{2}}(1+o(1))}=e^{A-C+\frac{B^2}{2}}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|\log(x) + A|}{1 + \log^2(x)}$$

per $A > 0$ specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Per il dominio dobbiamo imporre che l'argomento del logaritmo sia positivo e il denominatore diverso da zero da cui $D = (0, +\infty)$. La funzione è non negativa e vale 0 in $x = e^{-A}$ che è quindi un punto di minimo assoluto.
Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ da cui $y = 0$ asintoto orizzontale a $+\infty$.
Derivata prima. Per $x \in D \setminus \{e^{-A}\}$,

$$f'(x) = \pm \frac{\frac{1+\log^2(x)}{x} - (\log(x) + A)\frac{2\log(x)}{x}}{(1 + \log^2(x))^2} = \begin{cases} +\dfrac{\log^2(x) + 2A\log(x) - 1}{x(1 + \log^2(x))^2} & \text{se } 0 < x < e^{-A} \\ -\dfrac{\log^2(x) + 2A\log(x) - 1}{x(1 + \log^2(x))^2} & \text{se } x > e^{-A} \end{cases}$$

pertanto f è crescente in $(0, e^{-A-\sqrt{A^2+1}}]$ e in $[e^{-A}, e^{-A+\sqrt{A^2+1}}]$ mentre f è decrescente per $[e^{-A-\sqrt{A^2+1}}, e^{-A}]$ e in $[e^{-A+\sqrt{A^2+1}}, +\infty)$. Quindi $x = e^{-A-\sqrt{A^2+1}}$ e $x = e^{-A+\sqrt{A^2+1}}$ sono punti di massimo relativo.
Inoltre

$$f'_-(e^{-A}) = -\frac{e^A}{A^2+1}, \qquad f'_+(e^{-A}) = \frac{e^A}{A^2+1}$$

e dunque $x = e^{-A}$ è un punto angoloso.

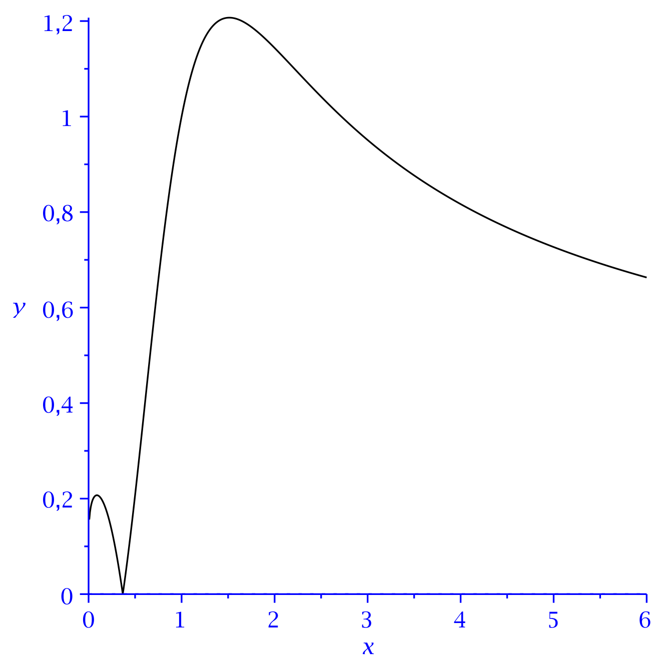

Grafico di $f(x) = \dfrac{|\log(x) + 1|}{1 + \log^2(x)}$.

Esercizio 3. [8 punti] Calcolare il seguente integrale improprio per $A > 0$:

$$\int_0^A \arctan\left(\frac{x}{A-x}\right)\,dx.$$

Svolgimento. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_0^A \arctan\left(\frac{x}{A-x}\right)\,dx &= \left[x\arctan\left(\frac{x}{A-x}\right)\right]_0^A - \int_0^A x\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{A-x}\right)^2}\,\frac{(A-x)+x}{(A-x)^2}\,dx \\ &= \frac{A\pi}{2} - A\int_0^A \frac{x}{2x^2-2Ax+A^2}\,dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo integrale rimanente tendendo presente che il polinomio $2x^2 - 2Ax + A^2$ è irriducible con $\Delta = -4A^2 < 0$: con la sostituzione $t = x - \frac{A}{2}$, si ha che

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x}{2x^2-2Ax+A^2}\,dx &= \int_{-A/2}^{A/2} \frac{2t+A}{(2t)^2+A^2}\,dt \\ &= \int_{-A/2}^{A/2} \frac{2t}{(2t)^2+A^2}\,dt + \int_{-A/2}^{A/2} \frac{A}{A^2+(2t)^2}\,dt \\ &= 0 + 2\int_0^{A/2} \frac{A}{A^2+(2t)^2}\,dt \\ &= \left[\arctan\left(\frac{2t}{A}\right)\right]_0^{A/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^A \arctan\left(\frac{x}{A-x}\right)\,dx = \frac{A\pi}{2} - \frac{A\pi}{4} = \frac{A\pi}{4}.$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{y(x)}{2x} = B \arcsin(1-x) \\ y(1) = A \end{cases}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Calcoliamo il fattore integrante

$$\exp\left(\int -\frac{dx}{2x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\log(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante e integrando si ha che

$$\begin{aligned} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} &= B \int \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x}}\, dx = 2B \int \arcsin(1-x) d(\sqrt{x}) \\ &= 2B\sqrt{x} \arcsin(1-x) + 2B \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx \\ &= 2B\sqrt{x} \arcsin(1-x) + 2B \int \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx \\ &= 2B\sqrt{x} \arcsin(1-x) - 4B\sqrt{2-x} + c. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = A$, si ottiene

$$A = y(1) = 2B \cdot 0 - 4B + c \implies c = A + 4B.$$

Così la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \sqrt{x}\left(A + 4B + 2B\sqrt{x} \arcsin(1-x) - 4B\sqrt{2-x}\right) \qquad \forall x \in (0,2)\,.$$