Università di Roma "Tor Vergata" - Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I - Prova scritta del 16 Febbraio 2021 - I

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{Ax} - \cos(x) - Ax\log(x)}{x^2 \log^2(Ax^2 + \sin(x))}$$

con $A \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3), \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

Quindi

$$x^{Ax} = e^{Ax\log(x)} = 1 + Ax\log(x) + \frac{A^2}{2}x^2\log^2(x) + o(x^2\log^2(x))$$

e dunque

$$\begin{aligned} x^{Ax} - \cos(x) - Ax\log(x) &= 1 + Ax\log(x) + \frac{A^2}{2}\,x^2\log^2(x) + o(x^2\log^2(x)) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - Ax\log(x) \\ &= \frac{A^2}{2}\,x^2\log^2(x) + o(x^2\log^2(x)). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \log^2(Ax^2 + \sin(x)) &= \log^2(x + o(x)) = \Big(\log(x) + \log(1 + o(1))\Big)^2 \\ &= \Big(\log(x) + o(1)\Big)^2 = \log^2(x)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Così si conclude che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{Ax} - \cos(x) - Ax\log(x)}{x^2 \log^2(Ax^2 + \sin(x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{A^2}{2}\,x^2\log^2(x) + o(x^2\log^2(x))}{x^2\log^2(x)(1 + o(1))} = \frac{A^2}{2}.$$

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2Ax}{x^2+A^2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{A}\right)$$

per $A > 0$ specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Per il dominio dobbiamo imporre che

$$\begin{cases} \left|\frac{2Ax}{x^2+A^2}\right| \le 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + A^2 \ge 2Ax \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-A)^2 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

e quindi $D = (0, +\infty)$.
Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ implica che $x = 0$ è un asintoto verticale e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

escludono la presenza di asintoti orizzontali o obliqui.
Derivata prima. Per $x \in D \setminus \{A\}$,

$$f'(x) = \frac{2A\frac{(x^2+A^2)-x(2x)}{(x^2+A^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2Ax}{x^2+A^2}\right)^2}} - \frac{1}{2x} = \frac{2A(A^2-x^2)}{(x^2+A^2)|x^2-A^2|} - \frac{1}{2x} = \begin{cases} \dfrac{2A}{(x^2+A^2)} - \dfrac{1}{2x} & \text{se } 0 < x < A \\ -\dfrac{2A}{(x^2+A^2)} - \dfrac{1}{2x} & \text{se } x > A \end{cases}$$

pertanto f è decrescente in $(0, (2-\sqrt{3})A]$ e in $[A, +\infty)$ mentre f è crescente per $[(2-\sqrt{3})A, A]$. Quindi $x = (2-\sqrt{3})A$ è un punto di minimo relativo e $x = A$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono massimi assoluti. Si noti che

$$\lim_{x\to A^-} f'(x) = \frac{1}{A} - \frac{1}{2A} = \frac{1}{2A}, \quad \lim_{x\to A^+} f'(x) = -\frac{1}{A} - \frac{1}{2A} = -\frac{3}{2A}$$

e dunque $x = A$ è un punto angoloso.

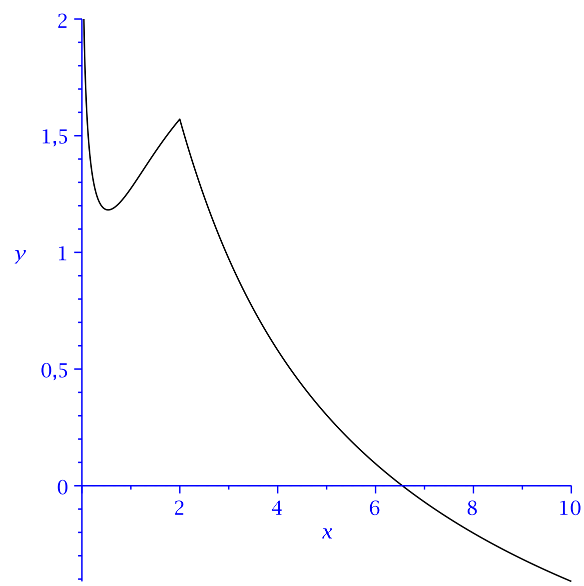

Grafico di $f(x) = \arcsin\left(\frac{4x}{x^2+4}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right)$.

Esercizio 3. [8 punti] Calcolare il seguente integrale improprio per $A > 0$:

$$\int_0^{A^2} \log(x + A\sqrt{x})\, dx.$$

Svolgimento. Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ l'integrale diventa

$$\int_0^{A^2} \log(x + A\sqrt{x})\, dx = \int_0^{A} 2t \log(t^2 + At)\, dt$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per parti

$$\begin{aligned}
\int 2t \log(t^2 + At)\, dt &= \int \log(t^2 + At) d(t^2) \\
&= t^2 \log(t^2 + At) - \int \frac{t^2(2t + A)}{t^2 + At}\, dt = t^2 \log(t^2 + At) - \int \frac{2t^2 + At}{t + A}\, dt \\
&= t^2 \log(t^2 + At) - \int \left(2t - A + \frac{A^2}{t + A}\right) dt \\
&= t^2 \log(t^2 + At) - t^2 + At - A^2 \log|t + A| + c.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{A^2} \log(x + A\sqrt{x})\, dx &= \left[t^2 \log(t^2 + At) - t^2 + At - A^2 \log|t + A|\right]_{0^+}^{A} \\
&= A^2 \log(2A^2) - A^2 \log(2A) \\
&\qquad - \lim_{t \to 0^+} \left(t^2 \log(t^2 + At) - t^2 + At - A^2 \log|t + A|\right) \\
&= A^2 \log(2A^2) - A^2 \log(2A) + A^2 \log(A) \\
&= A^2 \log(A^2) = 2A^2 \log(A).
\end{aligned}$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione per $A > 0$:

$$|z|^2 = z^2 \pm z + 2A \pm \overline{z}.$$

Svolgimento. Consideriamo l'equazione

$$|z|^2 = z^2 + z + 2A + \overline{z}.$$

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ l'equazione diventa

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy + 2A + x - iy,$$

ossia

$$2y^2 = 2x + 2A + 2ixy$$

e separando la parte reale e la parte immaginaria l'equazione in $\mathbb{C}$ si traduce in un sistema di due equazioni reali

$$\begin{cases} 2y^2 = 2x + 2A \\ 2xy = 0 \end{cases}.$$

Dopo aver diviso entrambe le equazioni per 2, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y^2 = x + A \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = A \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x + A = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{A} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -A \\ y = 0 \end{cases}.$$

Quindi le soluzione dell'equazione data sono

$$z_1 = \sqrt{A}\, i, \qquad z_2 = -\sqrt{A}\, i, \qquad z_3 = -A.$$

In modo analogo si trova che le soluzioni dell'equazione $|z|^2 = z^2 - z + 2A - \overline{z}$ sono

$$z_1 = \sqrt{A}\, i, \qquad z_2 = -\sqrt{A}\, i, \qquad z_3 = A.$$