UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
"TOR VERGATA"

Corso di Laurea in INGEGNERIA MEDICA
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA (9 cfu)
Anno Accademico 2015/2016

Prof. Piermarco CANNARSA

PROGRAMMA

1. Spazi funzionali. Convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni. Lo spazio metrico delle funzioni limitate con la metrica uniforme. Completezza dello spazio delle funzione limitate con la metrica uniforme e del sottospazio delle funzioni continue e limitate. Passaggio al limite sotto il segno di integrale. Applicazione alle serie di funzioni. Sottospazi dello spazio delle funzioni continue. Esempio di una successione di funzioni C^1 che convergono uniformemente a una funzione non C^1. Derivazione per serie. Applicazioni continue tra spazi metrici. Esempi. Lemma delle contrazioni (D).
2. Equazioni differenziali. Il problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Teorema di esistenza ed unicità locale per sistemi di equazioni differenziali ordinarie (D). Esistenza massimale (intervallo massimale di esistenza). Esistenza globale. Condizioni sufficienti affinché una soluzione massimale sia globale a destra e/o a sinistra nel caso della striscia (D). Punti di equilibrio di un sistema autonomo. Integrali primi. Il modello preda-predatore di Lotka-Volterra. Sistemi differenziali lineari del primo ordine. Soluzione di sistemi omogenei nel caso di autovalori distinti. Sistemi lineari piani. Comportamento asintotico delle soluzioni. Equazioni differenziali lineari di ordine n. Struttura dello spazio delle soluzioni. Determinazione di un sistema fondamentale di soluzioni per equazioni a coefficienti costanti. Equazioni di Eulero. Metodi per la ricerca di una soluzione particolare. Metodo della variazione delle costanti arbitrarie.
3. Funzioni di una variabile complessa. Il campo complesso. Coniugato. Modulo e argomento di un numero complesso e sua forma trigonometrica. Radici n-esime di un numero complesso. Struttura metrica del piano complesso. Limiti di successioni complesse e di funzioni complesse di variabile complessa. Funzioni continue di variabile complessa. Studio della continuità dell'argomento principale. La funzione esponenziale complessa e sua continuità. Convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni complesse di variabile complessa. Studio della funzione di Jukovski come trasformazione dal piano bucato nel piano complesso. Derivata di una funzione complessa di varaibile complessa. Condizioni necessarie per la derivabilità in senso complesso (D). Equazioni di Cauchy-Riemann. Condizioni sufficienti per la derivabilità in senso complesso (D). Analiticità della funzione esponenziale e delle funzioni trigonometriche complesse. Serie

di potenze in campo complesso. Disco e raggio di convergenza. Serie derivata. Derivabilità in senso complesso della somma di una serie di potenze (D). Caratterizzazione del raggio di convergenza. Derivata di una funzione composta. Derivata dell'inversa. Applicazione al calcolo della derivata del ramo principale della radice quadrata e del logaritmo complesso. Potenza complessa di un numero complesso. Funzioni armoniche. Funzioni armoniche coniugate. Esistenza dell'armonica coniugata su un dominio stellato. Integrale di una funzione continua di variabile complessa lungo una curva regolare a tratti con sostegno nel piano complesso. Primitive in senso complesso. Domini semplicemente connessi. Esistenza di una primitiva di una funzione olomorfa su un dominio semplicemente connesso (D). Teorema di Cauchy (D). Integrali di Fresnel. Formula integrale di Cauchy (D). Proprietà della media e principio del massimo modulo (D). Formula di Cauchy per le derivate. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville (D). Teorema fondamentale dell'algebra (D). Teorema di Morera (D). Convergenza uniforme sui compatti di successioni di funzioni olomorfe. Serie di potenze negative e serie bilatere. Sviluppo in serie di Taylor di una funzione olomorfa su un disco. Sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona. Zeri du una funzione olomorfa. Principio di identità. Molteplicità di un punto di una funzione olomorfa. Teorema di rimozione della singolarità di Riemann (D). Singolarità isolate di una funzione olomorfa: poli e singolarità essenziali. Caratterizzazione dei poli (D). Ordine di un polo. Teorema di Casorati-Weierstrass (D). Residuo di una funzione olomorfa in una singolarità isolata. Formula per il calcolo del residuo nel caso di un polo. Teorema dei residui. Applicazione al calcolo di integrali.

4. <u>Integrale di Lebesgue</u>. Misura esterna. Insiemi misurabili secondo Lebesgue. Misura di Lebesgue e sue proprietà. Funzioni misurabili secondo Lebesgue. Funzioni sommabili secondo Lebesgue. Convergenza quasi ovunque di successioni e serie di funzioni. Teoremi di Lebesgue (o della Convergenza Dominata) e di Beppo Levi (o della Convergenza Monotona).
5. <u>Spazi di Hilbert e serie di Fourier</u>. Prodotti scalari e norme su spazi vettoriali. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma associata a un prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Lo spazio di Hilbert delle funzioni di quadrato sommabile. Proiezione ortogonale su un concesso chiuso di uno spazio di Hilbert. Proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert. Successioni ortonormali. Problema della migliore approssimazione in media quadratica. Coefficienti di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Successioni ortonormali complete. Uguaglianza di Parseval e serie di Fourier di un elemento di uno spazio di Hilbert. Coefficienti di Fourier di una funzione periodica e regolare a tratti. Convergenza puntuale alla media del salto. Relazione tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quelli della sua derivata. Convergenza totale della serie di Fourier di una funzione periodica, regolare a tratti e continua. Applicazione delle serie di Fourier alla soluzione di problemi al contorno per l'equazione del calore e delle onde.

6. Trasformata di Laplace. Definizione di funzioni trasformabili secondo Laplace. Ascissa di convergenza.Funzioni di ordine esponenziale. Definizione di trasformata di Laplace. Esempi: la funzione di Heaviside, delta di Dirac, gli esponenziali complessi, le funzioni seno/coseno trigonometriche ed iperboliche. Potenze. Proprieta' generali: linearita', analiticita' (D), limitatezza e tendenza a zero (sotto opportune ipotesi) del limite a +infinito. Proprieta' algebriche: traslazione, moltiplicazione per esponenziali, e riscalamento. Trasformata della derivata di una funzione. Trasformata di funzioni periodiche (D). Convouluzione e trasformata di Laplace. Iniettivita` della trasformata di Laplace e formula di inversione. Applicazioni alle equazioni differenziali lineari e alle equazioni integro-differenziali.
7. Trasformata di Fourier. Definizione di Trafsormata di Fourier per funzioni L^1(R). L'esempio di funzioni caratteristiche e l'esempio della Gaussiana (D). Proprieta` algebriche: la derivata della trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier della derivata; riscalamanto; traslazione e motiplicazione per esponeziali, convoluzione. Lo spazio delle funzioni di Schwartz S(R) e densita` di S(R) in L^1(R) e L^2(R). Proprieta` generali: limitatezza unifrome della trasformata di Fourier in L^1(R) e tendenza a zero del'limite a +/- infinito (usando la densita` di S(R) in L^1(R) (D). Formula di inversione per funzioni regolari a tratti. La trasformata di Fourier su S(R): iniettivita`, suriettivita` e formula di inversione (D). Conservazione del prodotto scalare di L^2(R) della trasformata di Fourier di funzioni di S(R) (D). Estensione della trasformata di Fourier ad L^2(R). Il teorema del campionamento.