UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in INGEGNERIA MEDICA

METODI MATEMATICI PER L"INGEGNERIA

Prof. P. Cannarsa

II Appello – Sessione Estiva 23 luglio 2015

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2\big(x^3(t) - x(t)\big) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Determinare la soluzione massimale di (1) per $x_0 = 0$.
2. Dimostrare che la soluzione massimale di (1) è globale se $x_0 \in [-1, 1]$.
3. Determinare la soluzione massimale di (1) per $x_0 > 1$ e il relativo intervallo di esistenza.

Esercizio 2. Sia data la funzione di una variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)^2}\,.$$

1) Determinare e classificare le singolarità isolate di f e calcolarne i residui.
2) Calcolare, al variare del parametro $p \geq 0$, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx\ .$$

Esercizio 3. Determinare una serie trigonometrica che abbia come somma la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

e discuterne la convergenza uniforme.

Esercizio 4. Sia δ la delta di Dirac, si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = \delta(t-2) \quad , \quad t \geq 0\ .$$

Usando la trasformata di Laplace

1) trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione dell'equazione differenziale con dati iniziali $x(0) = 0$, $x'(0) = \alpha$.
2) trovare α affinchè la soluzione soddisfi le condizioni $x(0) = 0$, $x(2) = 1$.