UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in INGEGNERIA MEDICA

METODI MATEMATICI PER L"INGEGNERIA

Prof. P. Cannarsa

I Appello– Sessione Estiva 6 luglio 2015

Esercizio 1. Sia $\bar{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x(t) - 2}{2x(t) - t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

1) Giustificare il fatto che $\frac{t}{2} < \bar{x}(t) < 2$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$ e dedurne che $\alpha = -\infty$ e $\beta \leqslant 4$.

2) Determinare esplicitamente $\bar{x}$ effettuando il cambio di variabili $y(t) = 2x(t) - t$.
[$\bar{x}(t) = \frac{1}{2}\big(t + \sqrt{t^2 - 8t + 4}\big)$, $-\infty < t < 4 - 2\sqrt{3}$]

Esercizio 2. Sia n un intero positivo.

1) Determinare le singolarità isolate della funzione

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}},$$

classificarle, e calcolarvi il residuo di f.

2) Utilizzando il metodo dei residui, ricavare la formula (di Wallis)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos t\big)^{2n} dt = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.$$

Suggerimento: osservare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt$.

Esercizio 3. Dato $\alpha \geqslant 0$, si consideri la successione di funzioni

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{1 + nx} \qquad (x \geqslant 0).$$

1) Per $\alpha \in [0, 1]$, calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_{\alpha,n}(x)dx$. (*Suggerimento:* provare che $0 \leqslant f_{\alpha,n}(x) \leqslant e^{-nx}$).

2) Applicando il teorema della convergenza dominata, dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_{\alpha,n}(x)dx = 0$ per $1 < \alpha < 2$. (*Suggerimento:* dimostrare innanzitutto che $t^\alpha e^{-t} \leqslant (\alpha/e)^\alpha$ per $t \geqslant 0$).

3) Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{n^2 x e^{-nx}}{1 + nx} dx$$

non converge a zero per $n \to \infty$ (*suggerimento:* minorare l'integrale con $\frac{1}{2} \int_0^{1/n} n^2 x e^{-nx} dx$).

Esercizio 4. Usando la trasformata di Laplace risolvere la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = H(t-1) - H(t)\ , \ t \geq 0 \\ y'(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$