

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in INGEGNERIA MEDICA

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA

Prof. P. Cannarsa

I esonero – TEMA B

19 maggio 2015

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{2} (1 + x^2(t)) \arctan^3 x(t) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha < 0$.

- 1) Spiegare perché la soluzione massimale x_α del problema è strettamente negativa in tutto il suo intervallo di definizione.
- 2) Determinare x_α al variare di α e specificarne l'intervallo di definizione.

Esercizio 2. Dato $\alpha > 1$, sia

$$f_\alpha(z) = -\frac{4iz}{(z^2 + 2\alpha z + 1)^2}$$

- 1) Classificare le singolarità isolate di f_α e calcolare il residuo di f_α in ciascuna di esse.
- 2) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(\alpha + \cos t)^2}$$

Esercizio 3. Sia $z_0 = x_0 + iy_0$ una singolarità essenziale della funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Può succedere che u sia limitata in un intorno forato di (x_0, y_0) ? (Giustificare la risposta.)