UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in INGEGNERIA MEDICA

METODI MATEMATICI PER L"INGEGNERIA

Prof. P. Cannarsa

I esonero – TEMA A 19 maggio 2015

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{2}\left(1 + x^2(t)\right)\arctan^3 x(t) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

1) Spiegare perché la soluzione massimale x_α del problema é strettamente positiva in tutto il suo intervallo di definizione.

2) Determinare x_α al variare di α e specificarne l'intervallo di definizione.

Esercizio 2. Dato $\alpha > 1$, sia

$$f_\alpha(z) = \frac{4iz}{(z^2 + 2\alpha iz - 1)^2}$$

1) Classificare le singolarità isolate di f_α e calcolare il residuo di f_α in ciascuna di esse.

2) Calcolare l'integrale definito
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(\alpha + \sin t)^2}$$

Esercizio 3. Sia $z_0 = x_0 + iy_0$ un polo della funzione $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Può succedere che u sia limitata in un intorno forato di (x_0, y_0)? (Giustificare la risposta.)