

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

Appello straordinario – 15/11/2017 – h 09:30 – Aula 2 (PP2)

Esercizio 1. Si consideri la regione nel piano $\{x = 0\}$

$$A = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z^3 \leq y \leq z\}$$

e si consideri il solido Ω ottenuto ruotando A intorno all'asse z . Assumendo che la densità di massa sia 1, calcolare:

- 1) la massa di Ω (Punti 4)
- 2) il baricentro di Ω (Punti 4)

Esercizio 2. Determinare gli equilibri del sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \arctan(y(t)) \\ y'(t) = -(x(t) + y(t))^2 \end{cases}$$

e studiarne la stabilità. (Punti 8)

Suggerimento: considerare le soluzioni del sistema con condizioni iniziali $(0, y_0)$.

Esercizio 3.

- 1) Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π -periodica, che nell'intervallo $[0, 2\pi)$ coincide con $\cos \frac{x}{2}$ e discuterne la convergenza. (Punti 6)
- 2) Calcolare la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}. \quad (\text{Punti 3})$$

Esercizio 4. Per ogni $\mathbb{N} \ni k \geq 1$ si consideri la funzione di quadrato sommabile su \mathbb{R} definita da

$$g_k(t) = \begin{cases} \frac{\sin(kt)}{t} & t \neq 0 \\ k & t = 0 \end{cases}$$

- 1) Determinare una funzione f_k assolutamente integrabile su tale che $\widehat{f}_k = g_k$. (Punti 2)

2) Calcolare \widehat{g}_k . (Punti 2)

3) Sia

$$F(t) = (g_5 * g_6)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[5(t-s)] \sin(6s)}{s(t-s)} ds \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare \widehat{F} . (Punti 2)

(b) Dimostrare che

$$F(t) = \begin{cases} \pi \frac{\sin(5t)}{t} & t \neq 0 \\ 5\pi & t = 0. \end{cases} \quad (\text{Punti 4})$$