UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Autunnale – II Appello – 21/09/2017 – h 09:30 – Aula G2C

Esercizio 1. Si consideri la superificie chiusa $\mathscr{T}$ (detta *Toro*) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (2+\cos u)\cos v \\ y = (2+\cos u)\sin v \\ z = \sin u \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,2\pi) \times [0,2\pi).$$

(i) Calcolare l'area di $\mathscr{T}$. (Punti 4)
(ii) Cacolare il flusso entrante, attraverso $\mathscr{T}$, del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + e^y, yx + \cos(x+z), z + \sinh y). \qquad \text{(Punti 6)}$$

Suggerimento: applicare il teorema della divergenza.

Esercizio 2.

(a) Determinare tutti gli equilibri del sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)y(t)\big(x(t)-1\big) \\ y'(t) = y^2(t) - x^3(t) \end{cases} \qquad \text{(Punti 2)}$$

(b) Studiare la stabilità degli equilibri del sistema contenuti nel semipiano

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\}. \qquad \text{(Punti 3)}$$

(c) Studiare la stabilità dell'origine. (Punti 3)

Suggerimento: considerare le soluzioni del sistema con condizioni iniziali $(0, y_0)$.

Esercizio 3.

(i) Sia f una funzione continua a tratti su $[-\pi,\pi]$ con media nulla (*i.e.*, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$). Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

e si denotino i rispettivi coefficienti di Fourier con

$$\hat{F}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,e^{-int}\,dt \quad \text{e} \quad \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Dimostrare che $\hat{F}(n) = \frac{1}{i\,n}\hat{f}(n)$ per ogni $n \neq 0$. (Punti 3)

(ii) Sia $k \in \mathbb{N}$. Si considerino le funzione $p_k(x) := x^k$ su $(-\pi, \pi)$. Si dimostri che per $n \neq 0$:

$$\hat{p}_{k+1}(n) = (k+1)\left(\frac{1}{in}\,\hat{p}_k(n) + \hat{p}_k(0)\,\hat{p}_1(n)\right) \qquad \text{(Punti 4)}$$

(iii) Calcolare la serie di Fourier di $p_4(x) = x^4$ in $(-\pi, \pi)$. (Punti 3)

Esercizio 4. Si condideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) - 4x(t) = e^{-|t|} \qquad (\star)$$

1) Sia $x \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ una funzione pari. Provare che le proprietà seguenti sono equivalenti:

   (a) $x(\cdot)$ è soluzione di $(\star)$ su $\mathbb{R}$;

   (b) $x(\cdot)$ è soluzione di $(\star)$ su $]0, \infty[$ e $x'(0) = 0$. (Punti 3)

2) Utilizzando la trasformata di Fourier, dimostrare che esiste un'unica soluzione pari di $(\star)$, assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$, e calcolare tale soluzione. (Punti 6)

3) Determinare tutte le soluzioni $(\star)$ che siano funzioni pari su $\mathbb{R}$. (Punti 3)