

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Autunnale – I Appello – 07/09/2017 – h 09:30 – Aula G2C

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_{\Omega} \frac{|xy|}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

dove $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4x, \quad |y| \leq \sqrt{3}x\}$. (Punti 10)

Esercizio 2.

(a) Determinare tutti gli equilibri del sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - y^2(t) \\ y'(t) = x(t) \sin y(t). \end{cases} \quad (\text{Punti 2})$$

(b) Studiare la stabilità degli equilibri del sistema contenuti nel semipiano

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}. \quad (\text{Punti 4})$$

(c) Studiare la stabilità dell'origine. (Punti 6)

Suggerimento: considerare le soluzioni del sistema con condizioni iniziali $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$.

Esercizio 3. Sia f una funzione 2π -periodica e dispari, assolutamente integrabile su un periodo. Si denoti con

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

la sua serie di Fourier. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente identità:

$$c_{-n} e^{-inx} + c_n e^{inx} = A_n \sin nx \quad \text{dove} \quad A_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt. \quad (\text{Punti 7})$$

Esercizio 4. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & |t| < \pi \\ 0 & |t| \geq \pi. \end{cases} \quad (\text{Punti 6})$$

e utilizzare il risultato ottenuto per verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{(x^2 - 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{2}. \quad (\text{Punti 2})$$