UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Estiva – I Appello – 22/06/2017 – h 09:30 – Aula G2C

Esercizio 1. Per ogni $t \geqslant 0$ sia $S(t) = B \cup C(t)$, dove

$$\begin{aligned} B &= \Big\{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 \leqslant 0\,, \ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\Big\} \\ C(t) &= \Big\{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leqslant x_2 \leqslant t\,, \ \ x_1^2 + x_3^2 \leqslant 1\Big\}. \end{aligned}$$

Supponiamo che la regione $S(t)$ sia occupata da un corpo $\mathscr{S}(t)$ di densità

$$\rho(x) = \begin{cases} 4 & x \in B \\ f(x_2) & x \in C(t) \end{cases}$$

dove $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è una funzione continua.

(i) Per ogni $t \geqslant 0$ determinare il baricentro $\overline{x}(t) = \big(\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t)\big)$ di $\mathscr{S}(t)$. (Punti 5)

(ii) Per $f(t) \equiv c > 0$, determinare l'unico valore $t_c > 0$ tale che $\overline{x}_2(t_c) = 0$. (Punti 2)

(iii) Provare che, se esiste $\bar{t} \geqslant 0$ tale che $\overline{x}_2(t)$ è costante per ogni $t \geqslant \bar{t}$, allora

$$f(t) = 0 \qquad \forall t \geqslant \bar{t}.$$ (Punti 3)

Esercizio 2. Data $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) - x(t)\phi\big(x'(t)\big) = 0\,. \tag{$\star$}$$

(a) Supponendo $\phi(0) > 0$, si discuta la stabilità degli equilibri di ($\star$). (Punti 3)

(b) Prendendo $\phi(x) = -x$, si determini la soluzione massimale di ($\star$) che verifica le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Suggerimento: riportarsi ad un'equazione del primo ordine. (Punti 6)

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = x^4, \quad x \in [-\pi, \pi)\,,$$

si estenda f a $\mathbb{R}$ in modo che diventi una funzione 2π-periodica.

- Determinare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza. (Punti 6)
- Ricordando che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. (Punti 2)

Esercizio 4. Usando la trasformata di Fourier, risolvere il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sin t \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Punti 8)