UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Estiva Anticipata – II Appello – 13/02/2017 – h 09:30 – Aula G2C

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la regione

$$\Omega_\alpha := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha\, x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq x^2 - y^2\}.$$

(i) Si determini l'insieme $A := \{\alpha \in \mathbb{R} : \text{ la regione } \Omega_\alpha \text{ è limitata}\}$. (Punti 2)

(ii) Per $\alpha \in A$, calcolare il volume di Ω_α. (Punti 4)

(iii) Si determini un campo vettoriale $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tale che per ogni $\alpha \in A$ si abbia: $\mathrm{div}\vec{F} \not\equiv 0$ su Ω_α, ma il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso $\partial\Omega_\alpha$ è nullo. (Punti 2)

Esercizio 2. Sia $x :]\tau_-, \tau_+[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - t \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Utilizzando il teorema di confronto dimostrare che

$$-\sqrt{t} \leqslant x(t) \leqslant 1 - \sqrt{t} \qquad \forall\, t \in [1, t_+[. \qquad \text{(Punti 3)}$$

(b) Dedurre dal punto (a) che

$$\begin{cases} (i) \quad \tau_+ = +\infty \\ (ii) \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x(t)}{\sqrt{t}} = -1 \end{cases} \qquad \text{(Punti 2)}$$

(c) Sia y la soluzione massimale del problema

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) - 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Provare che y è globale e che

$$x(t) \leqslant y(t) \qquad \forall\, t \in]t_-, 1]. \qquad \text{(Punti 3)}$$

(d) Provare che $\tau_- < 0$ e che $x(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in [0,1]$. (Punti 2)

(e) Fissato $T \in]\tau_-, 0[$ e posto $y_T = y(T)$, dove y è la soluzione al punto (c):

(i) calcolare la soluzione massimale $z :]T_-, T] \to \mathbb{R}$ del problema

$$\begin{cases} z'(t) = z^2(t) - T \quad (t \leqslant T) \\ z(T) = y_T \end{cases}$$

ed osservare che $T_- > -\infty$; (Punti 3)

(ii) dimostrare che $x(t) \leqslant z(t)$, $\forall t \in]T_- \vee \tau_-, T]$, e dedurne che $\tau_- > -\infty$. (Punti 1)

Esercizio 3. Determinare i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - 2x \\ y' = x + y \end{cases}$$

e studiarne la stabilità. (Punti 6)

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che $f(x) = \cosh x$ per $|x| \leq \pi$.

(i) Determinare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza. (Punti 6)

(ii) Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. (Punti 2)

Esercizio 5. Usando la trasformata di Fourier, trovare una soluzione f dell'equazione

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4(x-y)^2} f(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R}).$$ (Punti 8)