# UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

## Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

*Prof. P. Cannarsa*

Sessione Estiva Anticipata – I Appello – 17/01/2017 – h 09:30 – Aula G2C

**Esercizio 1.** Si consideri la regione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 2y\}.$$

(a) Parametrizzare $\Omega$ in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (\theta, r, z) \in \Lambda$$

determinado la corrispondente regione $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. [Punti 2]

(b) Calcolare il volume di $\Omega$. [Punti 3]

ii) Calcolare l'area di $\partial\Omega$. [Punti 3]

iii) Sia $F(x, y, z) = (\sinh x, -y\cosh x, y^2 e^x + z)$. Calcolare il flusso di $F$ attraverso $\partial\Omega$ nella direzione della normale interna. [Punti 2]

**Esercizio 2.** [Punti 10] Dato $x > 0$ sia $y_x : ]\tau_-, \tau_+[ \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2ty(t) + y^2(t) \\ y(0) = x\,. \end{cases} \tag{$\star$}$$

(a) [Punti 2] Dimostrare che

(i) $y_x(t) > 0$ per ogni $t \in ]\tau_-, \tau_+[$,

(ii) $y_x$ è crescente su $[0, \tau_+[$.

(b) [Punti 4] Siano $z_\pm$ le soluzioni massimali dei seguenti problemi

$$\begin{cases} z_-'(t) = 2tz_-(t) \\ z_-(0) = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} z_+'(t) = z_+^2(t) \\ z_+(0) = \frac{x}{2}\,. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che $y_x(t) > z_+(t)$ per ogni $t \in [0, \tau_+[$ e dedurne che $\tau_+ < +\infty$.

(ii) Dimostrare che $y_x(t) < z_-(t)$ per ogni $t \in ]\tau_-, 0]$ e dedurne che $\tau_- = -\infty$.

(c) [Punti 4] Osservato che l'equazione in $(\star)$ è di Bernoulli, dimostrare che

(i) $\tau_- = -\infty$ (i) $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{\tau_+} e^{t^2}\,dt.$

**Esercizio 3.** Determinare l'unica soluzione assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) - x(t) = te^{-|t|} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

utilizzando i metodi descritti qui di seguito.

(a) Si risolva l'equazione sulla semiretta $[0, +\infty[$ e si determini, tra tutte le soluzioni, quella il cui prolungamento dispari a tutto $\mathbb{R}$ risulta essere di classe $C^1$. Si spieghi perché tale funzione risolve l'equazione data. [Punti 6]

(b) Si mostri che la trasformata di Fourier della soluzione è data da

$$\widehat{x}(\omega) = -i\,\frac{d}{d\omega}\,\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$$

e si determini una funzione $f$ tale che $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$. [Punti 6]

**Esercizio 4.** [Punti 8] Sia $a \notin \mathbb{Z}$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $2\pi$ e tale che

$$f(x) = \cos(ax) \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

i) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di $f$ e studiarne la convergenza in $[-\pi, \pi]$. [Punti 6]

ii) Calcolare il valore delle seguenti somme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^2 - n^2} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$ [Punti 2]