UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

I esonero – 25/11/2016 – h 11:00 Edificio PP2 – Aula 3

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 2\,\dot{x}(t)\sin\big(x(t)\big)\cos\big(x(t)\big) \\ x\,(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = x_1. \end{cases} \tag{P}$$

1) Spiegare perché per tutte le coppie di dati iniziali $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione massimale $\varphi(t; x_0, x_1)$ è globale (cioè definita su $\mathbb{R}$). [5 punti]

Osservato che la soluzione di (P) verifica

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{x}(t) + \cos^2\big(x(t)\big)\Big) \equiv 0,$$

2) calcolare $\varphi(t; 0, -1)$; [5 punti]

3) posto $\overline{\varphi}(t) = \varphi\big(t; \frac{\pi}{2}, 1\big)$,

   (a) dimostrare che $0 < \overline{\varphi}(t) < \pi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; [3 punti]

   (b) calcolare $\lim_{t\to+\infty} \overline{\varphi}(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} \overline{\varphi}(t)$; [3 punti]

   (c) dimostrare che $\overline{\varphi}(t) + \overline{\varphi}(-t) = \pi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. [5 punti]

Esercizio 2. Si consideri la curva

$$\gamma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 - z^2 = 1,\ x \geq 0,\ z \in [-1, 1]\big\}$$

e sia Σ la superficie ottenuta ruotando γ di un angolo 2π intorno all'asse z.

1) Trovare una parametrizzazione regolare di Σ e determinare l'equazione del piano tangente a Σ in un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. [4 punti]

2) Calcolare l'area di Σ. [5 punti]

3) Sia $\vec{F}(x, y, z) = \Big(x^2 + \sinh y, \dfrac{y}{2} + e^z, \cosh(xy)\Big)$. Determinare il flusso del campo $\vec{F}$ uscente da Σ. [6 punti]